

基于 Volterra 模型的非线性系统预测控制*

刘 强 许晓鸣 张卫东
(上海交通大学自动化系 200030)

摘 要 基于系统的正、负和双阶跃响应,提出一种新的非线性预测控制模型的建立方法,同时给出了相应的非线性控制算法,并证明了控制算法解的存在性和唯一性。针对化工过程蒸馏塔控制系统,通过仿真计算验证了该方法的有效性。

关键词 预测控制,非线性系统,Volterra 模型,控制算法

分类号 O 231.2

Volterra Model Based Predictive Control of Non-linear Systems

Liu Qiang, Xu Xiaoming, Zhang Weidong
(Shanghai Jiaotong University)

Abstract A new non-linear predictive model is built based upon positive, negative and double step responses. The predictive control algorithm for non-linear system is then proposed, and the existence and uniqueness of the solution are proved. As a simulation study, the new predictive control algorithm is applied to a non-linear distillation column system.

Key words predictive control, nonlinear system, Volterra model, control algorithm

1 引 言

目前,预测控制的成功应用还主要局限于线性系统,这是因为脉冲响应模型只对线性系统比较有效^[1-4]。本文首先利用系统的正、负和双阶跃响应,得到非线性系统的非参数模型;然后根据该模型获得相应的预测控制算法,并从数学上证明了该算法解的存在性和唯一性;最后以非线性蒸馏塔控制系统为例,验证了该方法的有效性。

2 稳定非线性系统非参数预测控制模型

对于工业过程的大多数对象而言,具备二阶核的 Volterra 级数^[5]已足以描述其主要动态特性。为避免静态偏差,全部选用其增量形式的表达式,即

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k-1} h_1(k-i)\Delta u(i) + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1-i} \times$$

$$h_2(k-i, k-j)\Delta u(i)\Delta u(j) + \dots \quad (1)$$

取 $\xi(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$, 对系统分别输入正、负

和双阶跃信号

$$u_p(k) = \xi(k), \quad u_n(k) = -\xi(k)$$

$$u_{2p}(k, i, j) = \xi(k-i) + \xi(k-j)$$

$$u_{2n}(k, i, j) = -\xi(k-i) - \xi(k-j)$$

可分别获得它们的零状态响应 $y_p(k), y_n(k), y_{2p}(k, i, j), y_{2n}(k, i, j)$ 。对于定常系统,存在以下关系

$$y_{2p}(k, i, j) = y_{2p}(k-i, 0, j-i)$$

$$y_{2n}(k, i, j) = y_{2n}(k-i, 0, j-i)$$

$$0 \quad i < j$$

易得系统的一、二阶内核为

$$h_1(k) = (y_p(k) - y_n(k))/2, \quad k \geq 1 \quad (2)$$

$$h_2(k, k) = (y_p(k) + y_n(k))/2, \quad k \geq 1 \quad (3)$$

$$h_2(i, j) = (y_{2p}(i, 0, i-j) + y_{2n}(i, 0, i-j) - 2h_2(i, i) - 2h_2(j, j))/4, \quad i > j \geq 1 \quad (4)$$

* 1998-09-21 收稿, 1998-12-28 修回

定义 $u(i) = 0, i < 0$, 则预测模型(1)可重新表

述为

$$y(k+l|k) = \sum_{i=0}^{k+l-1} h_1(k+l-i)\Delta u(i|k) + \sum_{i=0}^{k+l-1} \sum_{j=0}^{k+l-1-i} h_2(k+l-i, k+l-j) \times \Delta u(i|k)\Delta u(j|k) + \dots \quad (5)$$

其中, $y(k+l|k)$ 为 $y(k+l)$ 在 $t = k \times T$ 时刻的预测输出; $\Delta u(i|k)$ 为 $\Delta u(i)$ 在 $t = k \times T$ 时刻的假设值, $i \leq k$; $\Delta u(i|k) = \Delta u(i), i < k_0$.

3 非线性系统预测控制解的存在性和唯一性

3.1 问题描述

多步预测控制性能指标为

$$J(k) = \sum_{i=1}^M [y_d(k+i) - y_m(k+i|k)]^2 \rho(i) + \sum_{i=1}^M \Delta u^2(k+i-1|k) \omega(i), k=0 \quad (6)$$

其中, M 为控制时域长度; $\rho(i)$ 为误差权系数, $\rho(i) > 0, i = 1, 2, \dots, M$; $\omega(i)$ 为控制权系数, $\omega(i) > 0, i = 1, 2, \dots, M$; $y_d(k+i)$ 为 $y(k+i)$ 的期望值.

为了改善控制系统的鲁棒性,并使控制动作尽可能平滑,假设在优化时域中控制量不变,即

$$\begin{aligned} \Delta u(k|k) &= \Delta u \\ \Delta u(k+1|k) &= \dots = \\ \Delta u(k+M-1|k) &\triangleq 0 \end{aligned}$$

基于模型(5),考虑到 $h_2(i, j) = h_2(j, i)$ 和闭环修正,可建立预测模型

$$\begin{aligned} y_m(k+l|k) &= y(k) + \sum_{i=0}^{k-1} [h_1(k+l-i) - h_1(k-i)]\Delta u(i) + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1-i} [h_2(k+l-i, k+l-j) - h_2(k-i, k-j)]\Delta u(i)\Delta u(j) + \left\{ h_1(l) + 2 \sum_{j=0}^{k-1} h_2(l, k+l-j) \times \Delta u(j) \right\} \Delta u + \{h_2(l, l)\} \Delta u^2 \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $l = 1, 2, \dots, M, k = 0, y(0) = 0_0$. 选用如下表达式

$$\alpha(l) = h_2(l, l)$$

$$\begin{aligned} \beta(k, l) &= h_1(l) + 2 \sum_{j=0}^{k-1} h_2(l, k+l-j)\Delta u(j) \\ \mathcal{Y}(k, l) &= y(k) + \sum_{i=0}^{k-1} [h_1(k+l-i) - h_1(k-i)]\Delta u(i) + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1-i} [h_2(k+l-i, k+l-j) - h_2(k-i, k-j)]\Delta u(i)\Delta u(j) - y_d(k+l) \end{aligned}$$

其中, $l = 1, 2, \dots, M, k = 0, y(0) = 0_0$. 那么, (6) 式可重新表述为

$$\begin{aligned} J[k, \Delta u] &= \sum_{i=1}^M [\alpha(i)\Delta u^2 + \beta(k, i)\Delta u + \mathcal{Y}(k, i)]^2 \rho(i) + \Delta u^2 \omega(1) = a\Delta u^4 + b(k)\Delta u^3 + c(k)\Delta u^2 + d(k)\Delta u + e(k) \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^M \alpha^2(i)\rho(i) \\ b(k) &= \sum_{i=1}^M 2\alpha(i)\beta(k, i)\rho(i) \\ c(k) &= \sum_{i=1}^M [\beta^2(k, i) + 2\alpha(i)\mathcal{Y}(k, i)]\rho(i) + \omega(1) \\ d(k) &= \sum_{i=1}^M 2\beta(k, i)\mathcal{Y}(k, i)\rho(i) \\ e(k) &= \sum_{i=1}^M \mathcal{Y}^2(k, i)\rho(i) \end{aligned}$$

问题1 非线性系统预测控制问题等价于寻找控制变量 Δu^* , 使得性能指标(8)最优. 即

$$J[k, \Delta u^*] = \min_{\Delta u} J[k, \Delta u]$$

3.2 解的存在性和唯一性

定理1 对于问题1, 至少存在一个解 Δu^* , 使得 $J[k, \Delta u]$ 最小, 同时满足 $\partial J / \partial \Delta u |_{\Delta u^*} = 0_0$.

证明 设 $\alpha(1) = h_2(1, 1) > 0$, 令 $\omega = \omega(1) > 0_0$. 当 $|\Delta u| \leq N$ 时, $[\alpha(i)\Delta u^2 + \beta(k, i)\Delta u + \mathcal{Y}(k, i)]^2 \rho(i) + \dots$, 存在大数 $N > 0$, 使得

$$\sum_{i=1}^M [\alpha(i)\Delta u^2 + \beta(k, i)\Delta u + \mathcal{Y}(k, i)]^2 \rho(i) > \sum_{i=1}^M \mathcal{Y}^2(k, i)\rho(i), |\Delta u| \leq N$$

因而, 对于 $|\Delta u| \leq N$, 有

$$J[k, \Delta u] > \sum_{i=1}^M \mathcal{Y}^2(k, i)\rho(i) + \omega\Delta u^2 >$$

$$Y(k, i) \rho(i) = J[k, 0] \quad (9)$$

令

$$G = \max_{1 \leq i \leq M} \{ |\alpha(i) \sqrt{\rho(i)}|, |\beta(k, i) \sqrt{\rho(i)}|, |Y(k, i) \sqrt{\rho(i)}|, \omega \}$$

在实际区间 $[-N, N]$ 内, 有

$$\begin{aligned} 0 < J \\ MG^2(N^4 + 2N^3 + 3N^2 + 2N + 1) + \\ GN^2 = \text{const} \end{aligned}$$

这表明对于 $-N \leq \Delta u \leq N, J$ 连续有界。根据 Weierstrass 定理, 在闭区间中至少存在一个 Δu^* , 使得 $J[k, \Delta u]$ 最小。在 (9) 式基础上, 有 $J[k, -N] > J[k, 0]$ 和 $J[k, N] > J[k, 0]$ 。这意味着 $|\Delta u^*| < N$ 或 Δu^* 是 $[-N, N]$ 内的点。因而最优的 Δu^* 满足 $\partial J / \partial \Delta u |_{\Delta u^*} = 0$ 。(证毕)

定理 2 仅当 $\Delta u_3 = -\frac{3b}{4a} - \frac{2bc - 12ad}{8ac - 3b^2}$ 是方程 $\partial J / \partial \Delta u = 0$ 的解, $\Delta u_1, \Delta u_2$ 都为问题 1 的解。

证明 考虑到 $J = a\Delta u^4 + b\Delta u^3 + c\Delta u^2 + d\Delta u + e$, 有 $\partial J / \partial \Delta u = 4a\Delta u^3 + 3b\Delta u^2 + 2c\Delta u + d$ 。通过多项式除法, J 可表达为

$$J = \left(\frac{\Delta u}{4} + \frac{b}{16a} \right) \frac{\partial J}{\partial \Delta u} + \left(\frac{c}{2} - \frac{3b^2}{16a} \right) \Delta u^2 + \left(\frac{3d}{4} - \frac{bc}{8a} \right) \Delta u + \left(e - \frac{bd}{16a} \right) \quad (10a)$$

若存在 $\Delta u_1, \Delta u_2$, 满足

$$J[k, \Delta u_1] = J[k, \Delta u_2] = \min_{\Delta u} J[k, \Delta u]$$

那么 $\frac{\partial J}{\partial \Delta u} |_{\Delta u_1} = \frac{\partial J}{\partial \Delta u} |_{\Delta u_2} = 0$

根据 (10a) 式, 可得

$$\begin{aligned} J[k, \Delta u_1] - J[k, \Delta u_2] = & \left(\frac{c}{2} - \frac{3b^2}{16a} \right) (\Delta u_1^2 - \Delta u_2^2) + \\ & \left(\frac{3d}{4} - \frac{bc}{8a} \right) (\Delta u_1 - \Delta u_2) = \\ & (\Delta u_1 - \Delta u_2) \left[\left(\frac{c}{2} - \frac{3b^2}{16a} \right) (\Delta u_1 + \Delta u_2) + \right. \\ & \left. \left(\frac{3d}{4} - \frac{bc}{8a} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

由于 $\Delta u_1 \neq \Delta u_2$, 则有 $\left(\frac{c}{2} - \frac{3b^2}{16a} \right) (\Delta u_1 + \Delta u_2) + \left(\frac{3d}{4} - \frac{bc}{8a} \right) = 0$, 即

$$\Delta u_1 + \Delta u_2 = \frac{2bc - 12ad}{8ac - 3b^2} \quad (10b)$$

通过方程 $\partial J / \partial \Delta u = 0$ 的根与系数的关系, 可得

$$\Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3 = -\frac{3b}{4a} \Rightarrow$$

$$\Delta u_3 = -\frac{3b}{4a} - \frac{2bc - 12ad}{8ac - 3b^2}$$

由于计算 a, b, c, d 和 e 是基于非参数模型和先前的控制值, 必要条件几乎无法满足, 因此可认为在概率平均下最优解 Δu^* 是唯一的。(证毕)

定理 3 对于实数 Δu_1 和 $\Delta u_2, \Delta u_1 < \Delta u_2$, 成为问题 1 的解的充要条件是

$$\Delta u_3 = -\frac{3b}{4a} - \frac{2bc - 12ad}{8ac - 3b^2}$$

是方程 $\partial J / \partial \Delta u = 0$ 的解, 方程 $\partial J / \partial \Delta u = 0$ 的判据函数 Δ 小于 0。其中, $\partial^2 J / \partial \Delta u^2 |_{\Delta u_3} = 0, \Delta u_1 < \Delta u_3 < \Delta u_2, J[k, \Delta u_3]$ 是一个局部最大值。

证明略。

4 化工过程控制仿真研究

采用非线性蒸馏塔控制系统^[6], 对新的预测控制方法进行仿真验证。仿真模型如下

$$\theta = -0.1755\theta(t) - 0.05088\theta(t)u(t) -$$

$$1.745u(t) + 0.003671u^2(t) - 0.4768u^3(t)$$

选定的仿真参数为 $T = 0.5, N = 60, M = 10, \rho(i) = 0.15^i, \omega(1) = 0.4, \theta_0 = 3.0$ 。仿真结果如图 1 所示。图中曲线 ① 为 $u(t)$, 曲线 ② 为 $\theta_t = 3.0$, 曲线 ③ 为 $\theta(t)$ 。

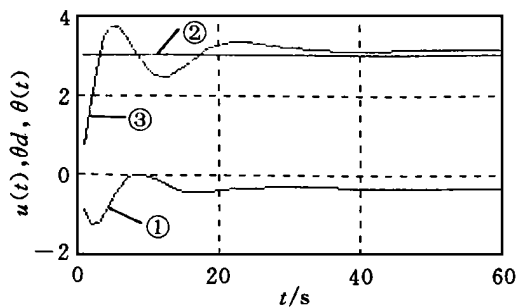


图 1 数字仿真结果

参考文献

- 1 Yeo Y K, William D C. Bilinear model predictive control. Ind Eng Chem Res, 1987, 26(11): 2267_2274
- 2 Garcia C E, Prett D M, Morari M. Model predictive control: Theory and practice—A survey. Automatica, 1989, 25(3): 335_348

(下转第 344 页)

4 仿真研究

考虑如下无量纲非线性系统

$$y(k+1) = (1 - Ty(k) \sin(y(k))) \times \sin(y(k)) + Ty(k)u(k)$$

神经网络输入矢量取

$$[y(k-5), y(k-4), u(k-5), u(k-4), u(k-3), u(k-2), u(k-1), u(k)]$$

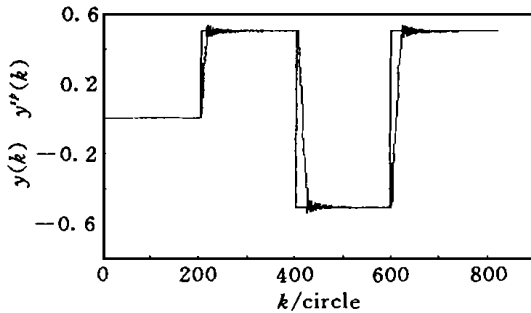


图1 系统输出 $y(k)$ 和被跟踪轨迹 $y^{\text{sp}}(k)$

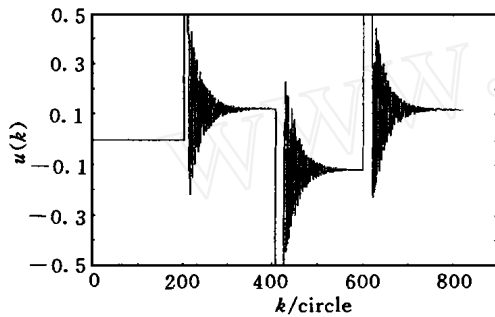


图2 控制 $u(k)$

两隐层分别取 4 个和 2 个结点, 输出层取 1 个结点 $y(k)$ 。使系统跟踪方波轨迹, 仿真结果如图 1 和 2 所示。结果表明系统能较好地跟踪方波轨迹。图中, $y(t)$ 和 $u(t)$ 是归一化无量纲变量, 时间轴单位是采样周期 T 。

参考文献

- 1 Richalet J, Rault J, Testud J *et al*. Model Predictive heuristic control: Applications to industrial processes *Automatica*, 1978, 14(5): 413_428
- 2 T Peterson, E Hernandez, Y Arkun. Nonlinear predictive control of a semi batch polymerization reactor by an extended DMC. In: 1989 American Control Conference 1989 1529_1534
- 3 Evclio Hernandez, Yaman Arkun. Neural network modeling and an extended DMC algorithm to control nonlinear systems. In: 1990 American Control Conference 1990 2454_2459

作者简介

刘军 男, 1960 年生, 1999 年于上海交通大学获博士学位, 现为青岛化工学院副教授, 主要研究方向为神经网络与非线性预测控制。

何星 男, 1970 年生, 博士, 上海交通大学副教授, 主要研究方向为复杂系统的协调控制。

许晓鸣 男, 1957 年生, 上海交通大学副校长, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为人工智能与复杂系统控制。

作者简介

刘强 男, 1971 年生, 1996 年在西北工业大学自动控制系获得硕士学位, 现为上海交通大学自动化系博士研究生, 研究领域为智能控制, 内点优化算法等。

许晓鸣 男, 1957 年生, 1987 年在上海交通大学获得博士学位, 现为上海交通大学副校长, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为智能控制。

张卫东 男, 1967 年生, 1996 年在浙江大学获得博士学位, 1998 年在上海交通大学自动化系完成博士后研究工作, 现为上海交通大学教授, 主要研究领域为过程控制和鲁棒控制。

(上接第 341 页)

- 3 Patwardhan A An, Rawlings J B, Edgar T F. Non-linear model predictive control *Chem Eng Column*, 1990, 87(1): 123_141
- 4 Wayne Bequette B. Non-linear control of chemical processes: A review. *Ind Eng Chem Res*, 1991, 38(7): 1391_1413
- 5 Body S, Chua L O. Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Volterra series *IEEE Trans CAS*, 1985, 32(10): 1150_1161
- 6 刘鸿强, 邵惠鹤, 蒋慰逊. 多元精馏塔动态仿真模型的简化. *华东化工学院学报*, 1983, 19: 225—233