

线性切换系统的矩阵系数多项式描述模型*

谢广明 郑大钟

(清华大学自动化系 北京 100084)

摘 要 针对线性切换系统,提出一种新的数学模型——矩阵系数多项式技术模型。该模型能够更简洁地描述系统,实现自治线性切换系统的仿真。

关键词 混合动态系统,线性切换系统,建模

分类号 TP 13

Matrix-coefficient Polynomial Description Model of Linear Switching Systems

X ie Guangm ing, Zheng D azhong
(Tsinghua University)

Abstract To linear switching system, a new mathematical model——matrix——coefficient polynomial description model is presented. This model can provide a brief description of the system. The simulation of autonomous linear switching system is implemented.

Key words hybrid dynamic systems, linear switching systems, modeling

1 引 言

混合动态系统(HDS)是同时包含连续时间变量和离散时间变量的复杂系统。切换系统(SS)作为混合动态系统理论中一类重要的模型,日益受到国内外学者的重视。切换系统的研究成果非常丰富,为发展和完善混合动态系统理论做出了贡献^[1-4]。

观察所采用的切换系统的数学模型,不难发现这些结果主要集中于各个连续子系统本身的性能分析,而很少注意到系统连续变量与离散变量之间联系的描述与分析,如果只是这样简单地考虑问题,则将退化到一般的研究动力系统的层次上,而失去作为控制领域的混合动态系统的特有意义。研究混合动态系统的一个重要原因是由于人们所面对的系统日趋复杂,为了追求更高的目标和效益,必须更深刻地去认识对象和分析问题。为此,建立更精细、更接近实际也更复杂的数学模型,成为理论研究的热点。混合动态系统正是这样一种复杂的模型。对于混合动态系统而言,对连续动态和离散动态之间的联系

建立一种简单而有效的数学模型,并赋予得力的研究工具,一直成为研究的一大难点。

本文针对线性切换系统,即各切换子系统都是线性的形式,运用多项式数值插值的方法,给出一个连续部分与离散部分联系的显式描述形式。这种描述在某种程度上更深入地揭示了切换系统的本质,并对系统的性能分析产生一定的作用。

2 主要结果

线性切换系统的一般形式化模型为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(q(t))x(t) + B(q(t))u(t) \\ y(t) = C(q(t))x(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $q(t)$ 为系统的离散变量,设取值于 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ 为一有限集。

观察上述模型,系统方程中虽然写成 $A(q(t))$ 的形式,但实际上 $A(q(t)): Q \rightarrow \{A(q_1), A(q_2), \dots, A(q_N)\}$ 只是一种形式化的表示,并没有给出连续变量和离散变量之间比较明显的联系。或者说,二者之间的直接相互作用的描述并不明显。

下面利用多项式插值的方法对其进行处理,其基本假设是所有系统矩阵 $A(q_1), A(q_2), \dots, A(q_N)$

* 国家自然科学基金项目(69684001)和国家攀登计划项目

1998- 12- 12 收稿, 1999- 04- 27 修回

均已知。

2.1 矩阵系数多项式模型

由于 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ 只是代表 N 个互异的离散符号, 因此具体取何种形式, 可有多种选择。我们取 $Q \in R$, 即取值于实数集合。若实际问题不是取值于实数集合, 则可通过简单的一一对应投射到实数集合上来。

2.1.1 系统矩阵为 1 维

此时状态变量为标量, $A(q_1), A(q_2), \dots, A(q_N)$ 实际上为 N 个互异实数。根据多项式插值理论, 对 $A(q_1), A(q_2), \dots, A(q_N)$ 和对应的 $q_1, q_2, \dots, q_N$, 可以确定一个 $N-1$ 次多项式 $A(s) = \sum_{i=0}^{N-1} A^{[i]} s^i$, 满足插值条件

$$A(q_j) = \sum_{i=0}^{N-1} A^{[i]} q_j^i, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

其中, $A^{[0]}, A^{[1]}, \dots, A^{[N-1]}$ 分别为插值多项式中第 i 次项的系数。

此时, 系统模型可以写成

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} A^{[i]} q(t)^i x(t) + B(q(t))u(t) \\ y(t) = C(q(t))x(t) \end{cases} \quad (3)$$

2.1.2 系统矩阵维数大于 1

此时, 对系统矩阵中每一位置上的元素, 分别按照 2.1.1 的方式进行处理, 可得到一个以矩阵为系数的多项式

$$A(s) = \sum_{i=0}^{N-1} A^{[i]} s^i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

满足插值条件(2)。其中, $A^{[0]}, A^{[1]}, \dots, A^{[N-1]}$ 为一组矩阵型系数, 可称为矩阵结构系数。

例 1 设系统矩阵分别为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

取 $q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3$, 经插值运算, 得

$$A^{[0]} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对 $B(q(t)), C(q(t))$ 类似处理, 得到的模型可写成

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} A^{[i]} q(t)^i x(t) + \sum_{i=0}^{N-1} B^{[i]} q(t)^i u(t) \\ y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} C^{[i]} q(t)^i x(t) \end{cases} \quad (5)$$

这样, 就得到了离散变量与连续变量直接相互作用的数学模型。

2.2 新型数学模型的作用

利用这种显式表示替代一般形式化表示, 可为切换系统的研究带来如下作用:

2.2.1 简化系统结构

当 $A(q_1), A(q_2), \dots, A(q_N)$ 个数较多且相差不大时, 可理解为系统矩阵发生微变或局部变化。如果离散变量取值合适, 得到的多项式有可能降次, 即 $\exists N_1 < N$, 使得 $A^{[i]} = 0, \forall i, N_1 < i \leq N-1$ 。此时, 用个数较少的结构系数矩阵, 就可完全表征原有的较多切换子系统矩阵, 简化了系统结构。

例 2 设

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

取 $q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3, q_4 = 0, q_5 = -3, q_6 = -2, q_7 = -1$ 。经插值计算, 得

$$A^{[0]} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{[3]} = A^{[4]} = A^{[5]} = A^{[6]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例 2 中只用 3 个系数矩阵, 就表征了系统的 7 个切换子系统。

2.2.2 实现系统仿真

由这种显式描述形式可以得到自治切换系统的闭环反馈型仿真模型, 实现系统的仿真实验。因为由

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=0}^{N-1} A^{[i]} q(t)^i x \Rightarrow \\ \dot{x} &= A^{[0]} x + \sum_{i=1}^{N-1} A^{[i]} q(t)^i x \Rightarrow \\ \dot{x} &= \tilde{A} x + \tilde{B} K(q(t)) x \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\tilde{A} = A^{[0]}, \quad \tilde{B} = [A^{[1]}, A^{[2]}, \dots, A^{[N-1]}]$$

$$K(q(t)) = [q(t)I, q(t)^2I, \dots, q(t)^{N-1}I]^T$$

这样就可利用如图 1 所示的仿真模型实现对自治系统的仿真实验。

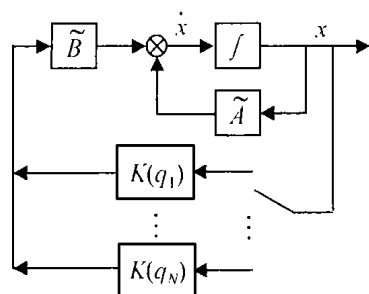


图 1 实现自治系统的仿真模型

2.2.3 深入研究切换系统的定性分析

采用这种描述形式,同时赋予一定条件,可深入进行切换系统的定性分析。例如,假设限制 $Q \in [0, \epsilon]$, ϵ 为一非负极小常数。此时,可将 $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N A^{[i]} q(t) x(t)$ 分解为 $A^{[0]} x(t)$ 和 $\sum_{i=1}^N A^{[i]} q(t) x(t)$ 两部分。由于 $q(t)$ 的取值很小,若结构系数矩阵满足某些较好的条件,系统的性能基本则由 $A^{[0]}$ 决定。这为切换系统的定性研究提供了一个新的思路。

3 结 语

本文针对线性切换系统提出了一个新的数学模型,所得结果只是较初步的,还有很多问题值得深入

研究。比如,插值点的选定,如何确定最佳插值点,以便简化系统结构;得到矩阵结构系数以后,如何进行系统的性能分析等等。这有待于另文介绍。

参 考 文 献

- 1 R L Grossman, A Nerode, A P Ravn *et al* Hybrid systems: Lecture notes in computer science New York: Springer-Verlag, 1993
- 2 P Antsaklis, V Kohn, A Nerode *et al* Hybrid systems II: Lecture notes in computer science New York: Springer-Verlag, 1995
- 3 R Alur, T Henzinger, E Sontag Hybrid systems III: Lecture notes in computer science New York: Springer-Verlag, 1996
- 4 P Antsaklis, W Kohn, M Lemmon *et al* Hybrid systems: Lecture notes in computer science New York: Springer-Verlag, 1998

作 者 简 介

谢广明 男,1972年生。1996年于清华大学应用数学系获应用数学专业和自动控制理论与应用专业双学士学位,同年保送清华大学自动化系攻读博士学位。主要研究方向为混合动态系统,切换系统的建模、分析与控制等。

郑大钟 见本刊1997年第12卷第2期第108页。

(上接第347页)

5 结 语

本文针对一类不确定非线性组合大系统,研究了系统可用结构全息状态反馈控制器分散镇定的问题,设计出一种线性全息控制器可使系统按指数渐近稳定。最后的数值仿真例子验证了所给结果的有效性。需要指出的是,本文讨论的是组合大系统具有结构相同的子系统,但其结果很容易推广到子系统满足一定条件(如相应的矩阵具有相同维数)而不完全相同的不确定组合大系统的分散镇定,此时的线性分散控制器已不再具有全息性质。

参 考 文 献

- 1 Yan X G, Wang J J, Lu X Y *et al* Decentralized output feedback robust stabilization for a class of nonlinear interconnected systems with similarity. IEEE Trans on Autom Contr, 1998, 43(2): 294_299
- 2 Wu H, Mizukami K Exponential stability of a class of nonlinear dynamical systems with uncertainties Syst Contr Lett, 1993, 21(3): 307_313

- 3 Chen Y H, Leitmann G Robustness of uncertain systems in the absence of matching condition Int J Contr, 1987, 45(5): 1527_1542
- 4 Emelyanov S V. Discontinuous output feedback stabilizing in uncertain M MO plant Int J Contr, 1992, 55(1): 83_107
- 5 Qu Z Global stabilization of nonlinear systems with a class of unmatched uncertainties Syst Contr Lett, 1992, 18(4): 301_307
- 6 张嗣瀛. 复杂控制系统的对称性及相似结构. 控制理论与应用, 1994, 11(2): 231—237
- 7 Callier F, Desoer C A. Linear system theory. New York: Springer, 1991
- 8 Banks S P, Alurani S K Lie algebra and the stability of nonlinear systems Int J Contr, 1994, 60(2): 315_329

作 者 简 介

徐兆棣 男,1955年生。沈阳师范学院数学计算机系副教授,东北大学在读博士生。研究方向为复杂控制系统的结构性研究及鲁棒控制。

张嗣瀛 男,1925年生。东北大学信息科学与工程学院教授,博士生导师,中国科学院院士。主要研究方向为对策论及复杂控制系统结构分析。