

采用双滑模平面减小一类非线性系统稳态误差*

冯 勇 安澄全

李 涛

(哈尔滨工业大学电气工程系 150001) (清华大学自动化系)

摘 要 分析了系统的稳态误差与滑模平面斜率的关系, 推导出其数学表达式。在此基础上, 提出了改进的滑模平面设计方法。该方法与饱和特性平滑策略相结合, 可使系统既能满足稳态误差的要求, 又能满足平滑控制量的要求。仿真结果证明了该方法的可行性。

关键词 变结构系统, 非线性系统, 滑模

分类号 TB 13

Steady State Error Reduction Using Two Sliding Surfaces in a Class of Nonlinear Systems

Feng Yong, An Chengquan

Li Tao

(Harbin Institute of Technology) (Tsinghua University)

Abstract After analyzing the relationship between the steady-state error of the system and the slope of the sliding surface, its mathematical equation is deduced. Based on the equation, a method of designing sliding surface is presented. The method can not only reduce the system steady-state error, but also soften control. The simulation results prove the exactness of the method.

Key words variable structure systems(VSS), nonlinear systems, sliding mode

1 引言

变结构控制系统的抖振现象是其应用的最大障碍^[1]。当前, 减小抖振现象的主要方法是用饱和特性代替开关特性。但该方法存在如下缺点: 对于具有不确定性的系统, 当饱和特性的宽度选取太小时, 消除抖振的效果不明显, 控制量仍做高频抖振; 而宽度选取较大时, 虽然可消除控制量的高频抖振, 但同时带来了较大的系统稳态误差。文献[2]采用扇区特性平滑代替常规饱和特性平滑以消除抖振, 同时减小系统的稳态误差。但采用该方法时, 状态轨迹距离平衡点越远, 饱和特性宽度越大, 系统鲁棒性越差。文献[3]采用低通滤波方法代替常规饱和特性平滑以消除抖振, 同时减小系统的稳态误差。但该方法不能对系统的稳态误差作出定量的描述。

本文研究一类非线性系统的变结构控制, 分析了系统的稳态误差与滑模平面斜率的关系, 推导出

其数学表达式。在此基础上, 提出了两种改进的变结构系统滑模平面设计方法, 可使变结构系统既满足稳态误差的要求, 又满足平滑控制量的要求。

2 一类非线性系统的变结构控制

为简便起见, 本文仅讨论单输入非线性系统的变结构控制问题。这一问题的讨论结果可以推广到一大类多输入非线性系统。

考虑单输入非线性系统的变结构控制问题

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = f(x(t), t) + u(t) + d(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中, $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$, 外部干扰满足 $|d(t)| \leq D(t)$, $f(x, t)$ 的估计函数为 $\hat{f}(x, t)$, $\Delta f(x, t) = f(x, t) - \hat{f}(x, t)$, 且 $|\Delta f(x, t)| \leq F(x, t)$ 。设计系统的滑模平面为

$$S(t) = ce_1(t) + e_2(t) \quad (2)$$

式中, $e_1(t) = e(t) = x(t) - x_d(t)$, $e_2(t) = \dot{e}(t)$ 。滑模平面(2)存在的条件为

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (S^2(t)) \leq -\eta |S(t)| \quad (3)$$

* 航天基金项目(GD9319)

1999-01-18 收稿, 1999-09-16 修回

式中 $\eta > 0$ 为一常数。对于系统(1), 保证满足条件(3)的充分条件是其控制量应选为

$$u(t) = u_{eq}(x(t), t) - k(x(t), t) \operatorname{sgn}(S(t)) \quad (4)$$

式中

$$u_{eq}(x(t), t) = -\hat{f}(x(t), t) + \ddot{x}_d(t) - c\dot{e}(t)$$

$$k(x(t), t) = F(x(t), t) + D(t) + \eta$$

对滑模平面(2)求导, 由式(4)有

$$\dot{S}(t) = ce_2(t) + \ddot{x}(t) - \ddot{x}_d(t) =$$

$$f(x(t), t) - \hat{f}(x(t), t) -$$

$$k(x(t), t) \operatorname{sgn}(S(t)) + d(t) =$$

$$d(t) + \Delta f(x, t) - k(x, t) \operatorname{sgn}(S(t))$$

非线性控制项的增益应选为

$$k(x(t), t) = F(x(t), t) + D(t) + \eta \quad (5)$$

因此

$$S(t)\dot{S}(t) \leq -\eta|S(t)| \quad (6)$$

从以上分析可以看出, 对于非线性系统(1), 采用控制策略(4), 系统能够满足滑模的存在条件。为了减小变结构系统的抖振现象, 通常采用饱和特性来平滑控制量, 即

$$u(t) = u_{eq}(x(t), t) - k(x(t), t) \operatorname{sat}(S(t), \varphi) \quad (7)$$

式中, $\operatorname{sat}(S(t), \varphi)$ 为饱和函数, 其定义为

$$\operatorname{sat}(S(t), \varphi) = \begin{cases} S(t)/\varphi, & |S(t)| \leq \varphi \\ \operatorname{sgn}(S(t)), & |S(t)| \geq \varphi \end{cases} \quad (8)$$

在常规平滑方法中, 宽度 φ 是根据式(4)中 $k(x(t), t)$ 的最大幅值确定的, 虽然可以消除抖振, 但同时增大了系统的稳态误差; 如果要减小稳态误差, 就必须减小 φ , 但这样又不能有效地消除变结构系统的抖振。

3 改进的滑模平面设计

3.1 稳态误差与滑模斜率的关系

对滑模平面式(4)取拉氏变换, 有

$$S(s) = (s + c)E(s) \quad (9)$$

所以, $S(t)$ 相当于一个一阶低通滤波器的输入, 而 $e(t)$ 则相当于该滤波器的输出, 即

$$E(s) = \frac{1}{s + c} S(s) \quad (10)$$

稳态误差 e_{ss} 与滑模平面的斜率 c 的关系为

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + c} S(s) = \frac{1}{c} \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) =$$

$$\frac{1}{c} \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{S}(t) = \frac{1}{c} S_{ss} \quad (11)$$

根据上述推导, 变结构控制系统的误差与滑模平面的斜率 c 的关系如图1所示。

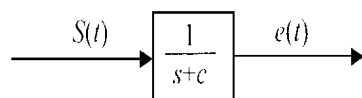


图1 误差与滑模斜率 c 的关系

在控制策略(4)的作用下, 系统(1)在饱和特性边界内部 $S(t) \leq \varphi$ 的轨迹可描述为

$$\dot{S}(t) = ce_1 + e_2 =$$

$$\Delta f(x(t), t) + d(t) - k(x(t), t) \frac{S(t)}{\varphi} \quad (12)$$

令 $i(t) = \Delta f(x(t), t) + d(t)$, $\lambda = k(x(t), t)/\varphi$, 则(12)式可写成

$$\dot{S}(t) = -\lambda S(t) + i(t) \quad (13)$$

由(13)式可得出系统在饱和特性边界内部 $S(t) \leq \varphi$ 的等效框图如图2所示。其输出 $S(t)$ 与

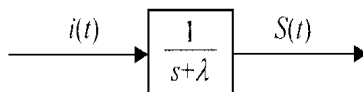


图2 系统在 $S(t) \leq \varphi$ 的等效框图

输入 $i(t)$ 的拉氏变换之间的关系为

$$S(s) = \frac{1}{s + \lambda} i(s) \quad (14)$$

根据终值定理, $S(t)$ 的稳态值 S_{ss} 为

$$S_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lim_{s \rightarrow 0} S(s) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + \lambda} i(s) \quad (15)$$

S_{ss} 与斜率 c 的取值无关。由式(11)可看出, 稳态误差与滑模平面的斜率 c 成反比。但 c 若取得很大, 则系统的滑模运动段很短, 系统大部分时间运动在到达段, 削弱了变结构系统鲁棒性强这一优势, 而且这样设计的系统调节时间也较长。如果 c 取值太小, 不但稳态误差较大, 而且调节时间也较长。

3.2 改进的滑模平面设计

本文利用上述滑模平面的斜率 c 的特性, 提出了两种改进的变结构系统滑模平面设计方法。

方法1 滑模平面如图3所示, 系统滑模平面为

$$S(t) = \begin{cases} c_1 e_1(t) + e_2(t), & \Delta > \delta \\ c_2 e_1(t) + e_2(t), & \Delta \leq \delta \end{cases} \quad (16)$$

式中, $c_1 < c_2$, $\Delta = |e_1(t)| + |e_2(t)|$, $\delta > 0$, 可根据对系统性能指标的要求来确定。

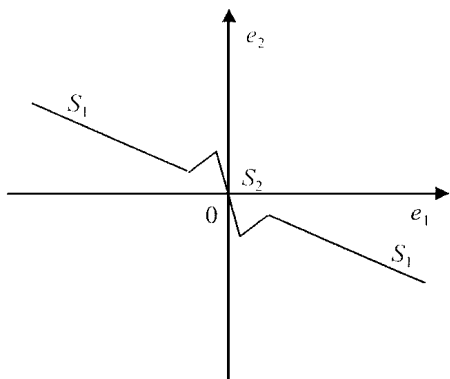


图 3 方法 1 的滑模平面示意图

上述滑模平面是由两个滑模平面组成的, 即

$$\begin{cases} S_1(t) = c_1 e_1(t) + e_2(t) \\ S_2(t) = c_2 e_1(t) + e_2(t) \end{cases} \quad (17)$$

第 1 个滑模平面 $S_1(t)$ 的斜率为 c_1 , 第 2 个滑模平面 $S_2(t)$ 的斜率为 c_2 , $c_1 < c_2$ 。当系统的状态变量离平衡点较远时, 采用斜率较小的第 1 个滑模平面 $S_1(t)$, 以保证系统尽快进入滑模平面; 当系统的状态变量离平衡点较近时, 采用斜率较大的第 2 个滑模平面 $S_2(t)$, 以保证系统的稳态误差较小。

由变结构系统的滑模平面存在条件(3), 可推导出变结构系统(1)的控制策略

$$u(t) = \begin{cases} u_{1eq}(x(t), t) - k(x(t), t) \operatorname{sgn}(S_1(t)) & \Delta > \delta \\ u_{2eq}(x(t), t) - k(x(t), t) \operatorname{sgn}(S_2(t)) & \Delta \leq \delta \end{cases} \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} u_{1eq}(x(t), t) &= -\hat{f}(x(t), t) + \ddot{x}_d(t) - c_1 \dot{e}(t) \\ u_{2eq}(x(t), t) &= -\hat{f}(x(t), t) + \ddot{x}_d(t) - c_2 \dot{e}(t) \\ k(x(t), t) &= F(x(t), t) + D(t) + \eta \end{aligned}$$

变结构系统的稳态误差为 $e_{ss} = S_{ss}/c_{20}$ 。由于 $c_1 < c_2$, 因此系统的稳态误差比只采用斜率为 c_1 的滑模平面 $S_1(t)$ 的稳态误差要小; 如果只采用斜率为 c_2 的滑模平面 $S_2(t)$, 则系统不易很快到达滑模平面。

变结构系统设计步骤如下: 首先按系统动态性能指标选取第 1 个滑模平面 $S_1(t) = c_1 e_1(t) + e_2(t)$ 的斜率 c_{10} 。当系统的状态接近平衡点时, 根据稳态误差的要求将滑模斜率改为 c_2 , $c_2 > c_1$, 一般取为 c_1 的十到几十倍。即将第 1 个滑模平面转变为第 2 个滑模平面 $S_2(t) = c_2 e_1(t) + e_2(t)$ 。

这样, 系统的动态过程主要为 S_1 的特性, 而稳态过程主要为 S_2 的特性, 使系统既有良好的动态特性, 又能满足稳态误差的要求。

方法 1 中系统将经历一个由 S_1 过渡到 S_2 的短暂的到达过程。由于系统已接近稳态, 这一过程将很短, 因而这一到达过程对系统影响不大, 但对系统毕竟是不利的。为此提出另一种方法:

方法 2 滑模平面如图 4 所示, 系统滑模平面为

$$S(t) = \begin{cases} c_1 e_1(t) + e_2(t) - \alpha \operatorname{sgn}(e_2(t)) & \Delta > \delta \\ c_2 e_1(t) + e_2(t), & \Delta \leq \delta \end{cases} \quad (19)$$

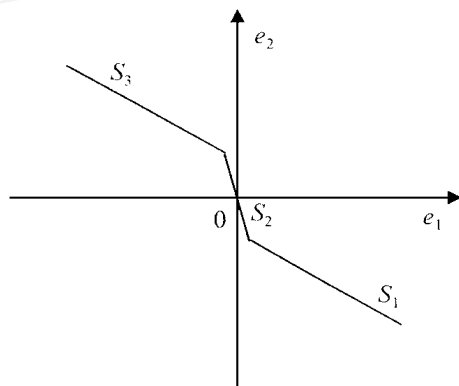


图 4 方法 2 的滑模平面示意图

式中, $\Delta = |e_1(t)| + |e_2(t)|$, $\delta > 0$ 为设计参数, 参数 α 为

$$\alpha = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + 1} \delta \quad (20)$$

整个滑模平面由两部分组成: 在原点附近为一段斜率较大的线段 S_2 , 其斜率 c_2 由系统的稳态误差决定。在 II, IV 象限分别有两条斜率同为 c_1 的射线 S_1, S_3 与此线段相连。 c_1 的取值由系统的动态要求决定。 c_1 和 c_2 的合理选择可使系统既有良好的动态特性, 又能满足稳态误差的要求。

方法 2 中变结构系统的控制策略设计步骤与方法 1 相同, 其控制量 $u(t)$ 如式(18)所示, 其稳态误差为 $e_{ss} = S_{ss}/c_{20}$ 。

方法 2 与方法 1 的差别在于: 前者的两个滑模平面的切换点是它们的交点, 不存在两个滑模平面之间的过渡; 而后者则存在过渡。

4 结 语

本文分析了变结构系统的稳态误差与滑模平面斜率的关系, 推导出其数学表达式。在此基础上, 提

出了两种改进的滑模平面设计方法,用以减小系统的稳态误差。通过理论分析和计算机仿真可以看出,本文所提出的变结构系统滑模平面设计方法具有如下优点:

- 1) 可根据变结构系统的稳态误差与滑模平面斜率的数学关系设计变结构系统。
- 2) 与常规的饱和特性平滑策略相结合,可使变结构系统既能满足稳态误差的要求,又能满足平滑变结构系统控制抖振的要求。
- 3) 算法简单,控制效果好。

参 考 文 献

- 1 H A sada, J J E Slotine Robot analysis and control John W iley & Sons, Inc, 1986
- 2 Jianxin Xu, Tongheng Lee, Mao Wang *et al* Design of variable structure controllers with continuous switching control Int J Contr, 1996, 65(3): 409_ 431
- 3 Pushkin Kachroo, Masayoshi Tom izuka Chattering re-

duction and error convergence in the sliding- mode control of a class of nonlinear systems IEEE Trans on Automat Contr, 1996, 41(7): 1063_ 1068

- 4 G Bontolini Chattering phenomenon in discontinuous control system. Int J Contr, 1989, 20(12): 1174- 1203
- 5 G Bontolini An improved, chattering free, VSC scheme for uncertain dynamical system. IEEE Trans on Autom Contr, 1996, 41(8): 1220- 1226

作 者 简 介

冯 勇 男,1962年生。1991年在哈尔滨工业大学获工学博士学位,现为该校教授,博士生导师。主要研究领域为变结构控制理论,计算机控制理论与应用。

安澄全 男,1974年生。1999年在哈尔滨工业大学获工学硕士学位,现为该校博士研究生。主要研究领域为变结构控制理论。

李 涛 男,1974年生。1998年于哈尔滨工业大学获工学硕士学位,现为清华大学博士研究生。主要研究领域为变结构控制理论,CMS。

(上接第360页)

5 结 语

本文提出的最优控制方案,FNNC结构和参数的优化是通过对控制过程的模拟,利用遗传算法优化包含控制器性能的指标来实现的。因此无需事先提供控制规则,只需测得被控对象的输入输出数据或已知被控对象的辨识模型,减少了因专家经验不足或不准确带来的影响。并且容易引入最优控制的思想,通过优化控制器性能指标来改善系统的控制性能。仿真结果表明,利用本文提出的最优控制器实现的控制,系统的动态性能和静态性能都优于用常规模糊控制器实现的控制。

参 考 文 献

- 1 C T L in Neural fuzzy control systems with structure and parameter learning Singapore: World Scientific Publishing Co Pte L td, 1994
- 2 J J Buckley, Y Hayashi Fuzzy neural networks: A survey. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 66(1): 1_ 13
- 3 H Ishigami, T Fukuda, T Shibata *et al* Structure opti-

mization of fuzzy neural network by genetic algorithm. Fuzzy Sets and System, 1995, 71(3): 257_ 264

- 4 J J Buckley, K D Reilly. Backpropagation and genetic algorithms for training fuzzy neural nets In: Proc of the Fifth IEEE Int Conf on Fuzzy Systems 1996 2_ 6
- 5 杨煜普,许晓鸣,张钟俊.基于模糊神经网络的控制规则获取及置信度估计问题.模式识别与人工智能,1994,7(1): 53-59
- 6 李士勇.模糊控制·神经网络控制和智能控制论.哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1996
- 7 M Srinivas, L M Patnaik Adaptive probabilities of crossover and mutation in genetic algorithms IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1994, 24(4): 656_ 667

作 者 简 介

周志坚 男,1970年生。华南理工大学自动化系博士。研究方向为模糊控制、神经网络控制和遗传算法的交叉研究。

毛宗源 男,1936年生。华南理工大学自动化系教授,博士生导师。主要从事工业自动化、智能控制的教学和研究。