利用跟踪微分器构造未知函数的寻优器及求根器*

韩京清
(中国科学院数学与系统科学研究院 北京 100080)
侯增广
(中国科学院自动化研究所)

摘 要 针对函数结构未知的情形,构造出能寻优和求根的非线性动态系统。这些动态系统是用两个跟踪微分器和函数的输入输出过程值模拟数值迭代过程得到的,是对未知函数实现寻优和求根的动态结构。

关键词 跟踪微分器,自寻优,方程求根
分类号 TP 273

Tracking Differentiator Approaches for Solving Optimization Problems and Finding Roots of Algebraic Equations

Han Jingqing
(Academy of Mathematics & Systems Sciences, Chinese Academy of Sciences)
Hou Zengguang
(Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences)

Abstract Nonlinear dynamical systems based on tracking differentiators (TD) are proposed to solve optimization problems and finding roots of algebraic equations without numerical iteration. Only in- and output information rather than direct gradient information of the function is required during the whole process. It is applicable to the cases where the objective functions or algebraic equations are unknown.

Key words tracking-differentiator, optimization, finding root

1 引 言

许多科学与工程问题都可归结为优化或求根问题。如果函数的解析表达式已知,基于函数的梯度信息已有很好的数值迭代算法;当函数表达式未知时,这些数值迭代算法则不能使用。如何仅用函数的输入输出信息来寻优或求根,是控制工程界长期以来比较关心的实际问题。

对于自寻优问题,Korovin 和 Utkin 利用滑动模态设计出一种非线性控制结构,构造了自寻最优装置[1,2];对于求根问题,Robbins 和 Monro 提出了量测被噪声污染时的随机逼近算法;之后,人们进行了大量研究,提出不少有效算法[3]。

为了从不可微或被噪声污染的信号中合理提取微分信号,文献[4]提出了跟踪微分器(Tracking Differentiator)概念,并给出了简单实用的算法。由于跟踪微分器具有良好的动态性能,已被成功地用于信号滤波、参数估计、非线性 PID、自抗扰控制器等。跟踪微分器作为一个基本的信号处理组件,具有很大的研究和应用开发潜力。

本文利用跟踪微分器,从函数的输入输出信息中合理地提取相应的微分信息并估计函数的梯度,构造出能够模拟数值迭代算法的非线性动态系统——寻优器和求根器。

* 国家自然科学基金项目(G69574033)和中国博士后科学基金项目
1998-12-14 收稿, 1999-04-22 修回

2　构造寻优器

求单变量函数优化问题 $\min\limits_x y = f(x)$ 的一种数值迭代算法为

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{\partial f(x_k)}{\partial x} = x_k - \lambda \frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x=x_k}, \quad \lambda > 0 \tag{1}$$

其连续实现可由如下动态过程描述。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\lambda \frac{\partial f(x)}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \lambda > 0 \tag{2}$$

算法(1) 或(2) 的关键在于合理地提取梯度 $\partial y/\partial x$。能否用 x 和 y 的差分比来计算呢?如果输入 x 和输出 y 的量测没有被噪声污染, 这是可以的; 一旦 x 和 y 被噪声污染, 这种求导结果则不能利用。

对于单变量情形, 有 $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。为消除噪声对微分的影响, 把 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 换成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, 用跟踪微分器分别确定 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, 然后用它们的比值来估计梯度信息 $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。把(2) 式改写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\lambda \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\lambda \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \tag{3}$$

此系统是完全能实现的。显然, 有 $\dot{y} = -(\dot{x})^2/\lambda$, 系统的 y 总是下降的, 可趋近极小值。

本文所用的跟踪微分器是如下单输入两输出的离散动态系统

$$z_1(k+1) = z_1(k) + hz_2(k)$$
$$\delta = hr, \quad \delta_1 = h\delta$$
$$e(k) = z_1(k) - v(k)$$
$$p(k) = e(k) + hz_2(k)$$
$$g(k) = \begin{cases} z_2 - r\,\mathrm{sign}(p(k))\left(h - \sqrt{8|p(k)|/r + h^2}\right)/2, & |p(k)| \geq \delta_1 \\ z_2 + p(k)/h, & |p(k)| < \delta_1 \end{cases}$$
$$z_2(k+1) = z_2(k) - hr\,\mathrm{sat}(g(k), \delta)$$

其中, $v(t)$ 为输入信号; $z_1(t)$, $z_2(t)$ 分别跟踪输入信号 $v(t)$ 及其导数, 是系统的两个输出量; r 是用来调节跟踪速度的正数, r 值大则跟踪速度快; h 为计算步长。

利用该跟踪微分器实现动态过程(2) 的具体结构如图 1 所示。

当得到梯度估计 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{y}/\dot{x}$ 之后, 为了改善系统的稳定性和提高求解精度, 信号 $\dot{y}/\dot{x}$ 经过 fal(•) 函数处理后进行积分。此处 fal(•) 为

$$\mathrm{fal}(x, \alpha, \delta) = \begin{cases} |x|^{\alpha}\mathrm{sign}(x), & |x| > \delta \\ x/\delta^{1-\alpha}, & |x| \leq \delta \end{cases}$$
$$\delta > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

于是动态系统(3) 变成

$$\dot{x} = -\lambda \mathrm{fal}(\dot{y}/\dot{x}, \alpha, \delta) \tag{4}$$

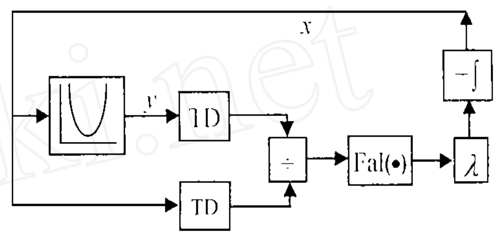

图 1　寻优器结构图

例 1　用上述寻优器求函数 $y = x|x|\sin(8x)$ 的极小值。

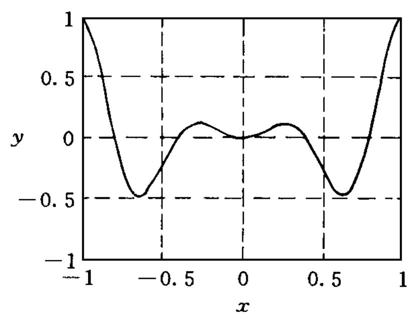

图 2　函数 $y = f(x)$ 的曲线

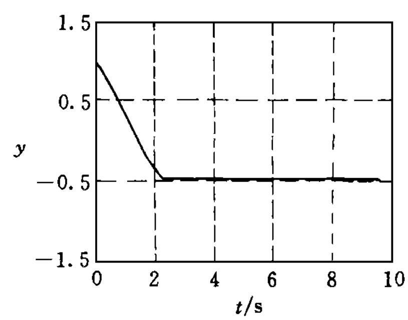

图 3　y 衰减到极小点的过程

图 2, 图 3 分别给出了函数 $y(x)$ 和 y 衰减到极小点的过程, 初始值为 $x(0) = 1.0$。从图中可看出, 寻优过程较为理想。通过调整系统参数 λ, α 和 δ, 可得到不同的寻优效果。增加 λ 或减小 α, 可加快计算速度; 增加 δ 可降低系统切换频率, 提高系统稳定性。各参数选择范围宽, 取值方便。在图 1 中置入有极小值的可微或不可微的任意连续函数, 寻优器都

能正常运行。

3　构造求根器

当函数的解析表达式 $y = f(x)$ 已知时, 可用如下迭代算法来求根。

$$x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k) \Big/ \frac{\mathrm{d}f(x_k)}{\mathrm{d}x} \tag{5}$$

该迭代算法的连续实现可由如下动态过程描述。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\lambda f(x) \Big/ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -\lambda f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}f(x)}$$

由于解析表达式 $f(x)$ 未知, 则把上式改写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\lambda y \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

然后利用跟踪微分器估计 $\mathring{x} \approx \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $\mathring{y} \approx \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, 得到能实现的动态系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\lambda y \frac{\mathring{x}}{\mathring{y}} \tag{6}$$

显然, 当 $\mathring{x} \neq 0$ 时, 有 $\mathring{y} = -\lambda y$, y 总趋于 0。

用跟踪微分器实现该动态系统的具体结构如图 4 所示。

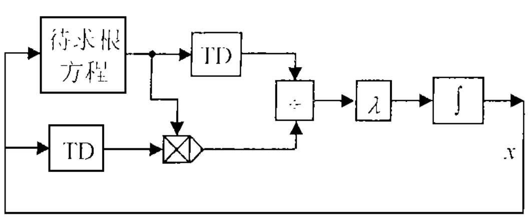

图 4　求根器结构图

给定初始条件 $x(0)$, 则系统自动收敛到 $y(x) = 0$ 的根, 为了加快搜索速度, 用 fal(•) 函数可把动态系统(6) 改造为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\lambda \mathrm{fal}\left(y\frac{\mathring{x}}{\mathring{y}}, \alpha, \delta\right) \tag{7}$$

例 2　用上述求根器求函数 $y = \sin(x) - 0.5$ 的根。

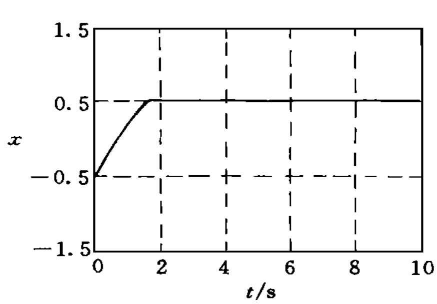

图 5　求根器的求根收敛过程

图 5 给出了 x 收敛于根的过程, 初始条件为 $x(0) = -0.5$。在图 4 的待求根方框中随便置入有根的函数或过程, 求根器的输出 x 都能收敛到一个对应于该初始条件 $x(0)$ 的根。并且在较大的参数选择范围内, 系统都能保持稳定; 在有噪声扰动情况下, 系统有较强的鲁棒性。

4　结　　语

本文讨论函数解析式未知情形的寻优和求根问题。利用跟踪微分器和函数的输入输出数据, 构造了自动寻优和自动求根的非线性动态结构——寻优器和求根器。数值仿真研究结果表明, 本文提出的寻优器和求根器结构简单, 实现容易, 且稳定性好, 鲁棒性强。这里研究的是单变量函数情形, 至于多变量函数的优化及多元方程求根问题, 有待进一步的研究。我们认为, 跟踪微分器在多变量问题求解中仍将发挥重要的作用。

参 考 文 献

1　S K Korovin, V IU tkin. The use of the sliding mode in static optimization problems. Auto Remote Control, 1972, (4): 50_ 60

2　S K Korovin, V IU tkin. Using sliding modes in static optimization and nonlinear programming. Automatica, 1974, 10: 525_ 532

3　陈翰馥, 朱允民. 随机逼近. 上海: 上海科学技术出版社, 1996

4　韩京清, 王伟. 非线性跟踪—微分器. 数学与系统科学. 1994, 14(2): 177—183

5　韩京清, 王伟. 非线性跟踪—微分器的另一种形式. 见: 全球华人智能自动化与智能控制大会论文集. 北京, 1993. 2355- 2362

6　韩京清, 袁露林. 跟踪微分器的离散形式. 数学与系统科学, 1999, 19(3); 268—273

作 者 简 介

韩京清　男, 1937 年生。1958 年毕业于吉林大学数学系, 1963—1966 年在前苏联莫斯科大学数学系攻读研究生学位, 现为中国科学院数学与系统科学研究院研究员。主要学术方向为最优控制理论, 导引理论, 线性、非线性控制, 控制系统 CAD 软件, 人口论。

侯增广　男, 1969 年生。1997 年在北京理工大学获博士学位, 1997 至 1999 年在中国科学院系统科学研究所做博士后研究, 现为中国科学院自动化研究所副研究员。目前主要研究兴趣为控制系统非线性设计, 最优化方法与机器人控制技术。