

特定 Mamdani 模糊系统的通用逼近性*

曾珂 徐文立 张乃尧
(清华大学自动化系 北京 100084)

摘要 特定 Mamdani 模糊系统是指采用模糊单点作为规则后件的多输入单输出 Mamdani 模糊系统。在每个输入变量的模糊子集满足一致性以及隶属函数连续且分段可微的条件下,证明了特定 Mamdani 模糊系统是通用逼近器。在此基础上,进一步给出了特定 Mamdani 模糊系统一致逼近紧致集上任意连续实函数的充分条件。

关键词 特定 Mamdani 模糊系统, 通用逼近性, 连续实函数, 多项式, 充分条件

分类号 TP 273.4

Universal Approximation of Special Mamdani Fuzzy Systems

Zeng Ke, Xu Wenli, Zhang Naiyao
(Tsinghua University)

Abstract Special Mamdani fuzzy systems are multi-input single-output Mamdani fuzzy systems with fuzzy singletons as rule consequent. Under the condition that functions are continuous and piecewise differentiable, it is proved that special Mamdani fuzzy systems are universal approximators. A sufficient condition is given for the special Mamdani fuzzy systems to uniformly approximate any real continuous function on a compact set.

Key words special Mamdani fuzzy system, universal approximation, real continuous function, polynomial, sufficient condition

1 引言

从数学上看,模糊系统实现的是从输入论域到输出论域的函数映射。模糊系统的通用逼近性是指模糊系统是否能以任意精度逼近紧致集上的任意连续实函数。当模糊系统用作辨识时,通用逼近性决定了它能否逼近任意连续的非线性动态模型;当模糊系统用作控制时,通用逼近性决定了它能否逼近任意连续的非线性控制曲线。可以认为,模糊系统的所有理论研究和实际应用都是建立在模糊系统通用逼近性的基础上,因此,研究模糊系统的通用逼近性无论在理论上还是在应用中都有重要的意义。

对 Mamdani 模糊系统通用逼近性的研究已取得很大进展^[1-10],但这些成果都是在对 Mamdani 模糊系统进行不同程度限制的基础上得到的,如采用

模糊单点作为规则后件^[1-10],采用高斯隶属函数^[1]、伪梯形隶属函数^[2]、min 算子^[3]等。

虽然已有较多文献研究了 Mamdani 模糊系统的通用逼近性,但对 Mamdani 模糊系统一致逼近紧致集上任意连续实函数的充分条件研究得还远远不够,目前可以查到的文献仅有 2 篇^[11,12]。其中,[11]要求每个输入变量的所有模糊子集采用具有相同形式的隶属函数,并对隶属函数的具体形状做了进一步限定;[12]则采用伪梯形隶属函数进行研究。

传统意义上,Mamdani 模糊系统的规则后件是模糊集,而本文研究的多输入单输出 Mamdani 模糊系统则采用模糊单点作为规则后件,我们称其为特定 Mamdani 模糊系统。特定 Mamdani 模糊系统可有任意个数的输入变量,每个输入变量可有任意个数和任意形状隶属函数的模糊子集,并采用普遍使用的重心法解模糊。在每个输入变量的模糊子集满足一致性以及隶属函数连续且分段可微的条件下,本文将证明特定 Mamdani 模糊系统是通用逼近器;

* 国家自然科学基金项目(69774015)

1999-07-08 收稿,1999-09-23 修回

在进一步限定每个输入变量的模糊子集都是广义全交叠的条件下,给出了特定 Mamdani 模糊系统一致逼近紧致集上任意连续实函数的充分条件。

2 预备知识

Mamdani 模糊系统的一般性定义为^[1]

$$R_j: \text{IF } x_1 \text{ is } A_1^j \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^j \\ \text{and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } A_n^j \\ \text{THEN } y_j = B_j, \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (1)$$

其中, $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为输入变量, A_i^j 和 B_j 为模糊子集, M 为模糊规则总数。通常 B_j 取为模糊单点, 即 $\forall b_j \in U$, 如果 $\mu_{B_j}(b_j) = 1$, 则对任意 $z \in U, z \neq b_j$, $\mu_{B_j}(z) = 0$, 其中 U 为 B_j 的论域。此时称由式(1)定义的 Mamdani 模糊系统为特定 Mamdani 模糊系统。

对特定 Mamdani 模糊系统, 不失一般性, 设 $0 < x_i < 1$ (可用简单的线性变换将 $x_i \in [a, b]$ 映射到 $[0, 1]$), 对每个输入变量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 定义 n_i 个模糊子集, 从而规则总数为 $M = \prod_{i=1}^n n_i$, 式(1)所给的第 j 条模糊规则的激活度为 $\mu_j(x) = \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i)$ 。容易求得, 特定 Mamdani 模糊系统的输出为

$$f_{\text{FS}}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{j=1}^M (\mu_j(\mathbf{x}) b_j)}{\sum_{j=1}^M \mu_j(\mathbf{x})} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 并令 $x_0 = 1$ 。

设输入变量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的第 k_i 个模糊子集的中心点位于 $C_{k_i}^i (k_i = 1, 2, \dots, n_i)$, 并有 $0 < C_1^i < C_2^i < \dots < C_{n_i}^i < 1$ 。不失一般性, 设每个中心点处的隶属度为 1。对每个输入变量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 定义模糊分割间距 $D_{k_i}^i = C_{k_i}^i - C_{k_i-1}^i (k_i = 1, 2, \dots, n_i + 1)$, 其中 $C_0^i = 0, C_{n_i+1}^i = 1$ 。在此基础上, 可对每个输入变量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 定义最大模糊分割间距

$$D_{\text{MAX}}^i = \max_{k_i=1}^{n_i+1} D_{k_i}^i \quad (3)$$

在 $C^n[0, 1]$ 上定义的 q 次 n 元多项式函数为

$$P_q(\mathbf{x}) = \sum_{d_1=0}^{m_1} \sum_{d_2=0}^{m_2} \dots \sum_{d_n=0}^{m_n} \beta_{d_1 d_2 \dots d_n} x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$$

$m_i = q$
 $i=1$

定义 1(一致性)^[2] 称论域 U 上的一组模糊集

$A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是一致的, 如果对某些 $x_0 \in U$ 存在 $A_k (k \in \{1, 2, \dots, n\})$, 使得 $\mu_{A_k}(x_0) = 1$, 且对任意 $j = 1, 2, \dots, n, j \neq k$, 均有 $\mu_{A_j}(x_0) = 0$ 。

注 1 现以人的身高为例来分析一致性的物理意义。定义 3 个模糊集“高”、“中”和“矮”; 如果这 3 个模糊集是一致的, 那么当身高对“矮”的隶属度为 1 时, 对“高”和“中”的隶属度均为零。从物理意义上看, 一致的要求是非常合理的, 并且容易通过适当选取隶属函数来实现。

假设 1 本文研究的特定 Mamdani 模糊系统的每一个输入变量的模糊集都是一致的。

假设 2 本文研究的特定 Mamdani 模糊系统采用的隶属函数都是连续且分段可微的。

注 2 事实上, 已知的理论研究和工程实践中所用的隶属函数都是连续且分段可微的。

3 特定 Mamdani 模糊系统是通用逼近器

下面以假设 1 和假设 2 为前提, 证明特定 Mamdani 模糊系统是通用逼近器。

引理 1 特定 Mamdani 模糊系统能以任意精度一致逼近 $C^n[0, 1]$ 上的 q 次 n 元多项式函数 $P_q(\mathbf{x})$, 即 $\forall \epsilon > 0$, 存在特定 Mamdani 模糊系统, 使得 $|f_{\text{FS}}(\mathbf{x}) - P_q(\mathbf{x})| < \epsilon$, 其中无穷范数 $\| \cdot \|_{\infty}$ 定义为: 对任意函数 $a(\mathbf{x})$, $\|a(\mathbf{x})\|_{\infty} = \sup_{\mathbf{x} \in U} |a(\mathbf{x})|$, 其中紧致集 $U \subset R^n$ 。

证明 (1) 考察特定 Mamdani 模糊系统的每一条模糊规则 $R_j (j = 1, 2, \dots, M)$, 它决定了特定 Mamdani 模糊系统的一个特殊输入矢量 $\mathbf{x}_j = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 其中每个分量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的取值恰好等于对应的模糊子集 A_i^j 的中心点, 即 $x_i = C_{k_i}^i (i = 1, 2, \dots, n; k_i \in \{0, 1, \dots, n_i\})$ 。

显然, 全部这样的特殊输入矢量共有 M 个, 且与模糊规则一一对应。记它们的集合为 $S = \{\mathbf{x}_j = (C_{j_1}^1, C_{j_2}^2, \dots, C_{j_n}^n)^T | j = 1, 2, \dots, M; 1 \leq j_i \leq n_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ 。

首先证明存在一组 $b_j (j = 1, 2, \dots, M)$, 使得特定 Mamdani 模糊系统在这 M 个点上的输出与 q 次 n 元多项式函数相等, 即 $\forall \mathbf{x}_j \in S (j = 1, 2, \dots, M)$, 有 $f_{\text{FS}}(\mathbf{x}_j) = P_q(\mathbf{x}_j)$ 。

注意到在假设 1 的保证下, 对任意 $\mathbf{x}_j \in S (j = 1, 2, \dots, M)$, 有 $\mu_j(\mathbf{x}_j) = 1$, 而对任意 $k \neq j, k \in \{1, 2, \dots, M\}$, 有 $\mu_k(\mathbf{x}_j) = 0$ 。

2, ..., M}, 均有 $\mu^k(x_j) = 0$ 。从而由式(2)得

$$f_{FS}(x_j) = b_j = P_q(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, M$$

显然, 全部 M 个这样的方程恰好求得一组 $b_j (j = 1, 2, \dots, M)$, 使得特定 Mamdani 模糊系统满足

$$f_{FS}(x_j) = P_q(x_j)$$

$$\forall x_j \in S, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

(2) 在此基础上, 考察特定 Mamdani 模糊系统在任意输入 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 时的通用逼近性。

注意到对 x 的任意分量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 总可以找到下标 $k_i \in \{1, 2, \dots, n_i + 1\}$, 使得 $C_{k_i-1}^i < x_i < C_{k_i}^i$, 从而存在 $x_j = (C_{j_1}^1, C_{j_2}^2, \dots, C_{j_n}^n)^T \in S (j = 1, 2, \dots, M)$, 使得

$$|x_i - C_{j_i}^i| \leq D_{MAX}^i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

根据假设 2, 由式(2)易知函数 $f_{FS}(x)$ 连续且分段可微, 注意到 $f_{FS}(x_j) = P_q(x_j)$, 利用微分中值定理, 有

$$\begin{aligned} |f_{FS}(x) - P_q(x)| &= \\ |f_{FS}(x) - f_{FS}(x_j) + P_q(x_j) - P_q(x)| &= \\ |f_{FS}(x) - f_{FS}(x_j)| + |P_q(x_j) - P_q(x)| &= \\ \max_{i=1}^n D_{MAX}^i \left[\left\| \frac{\partial f_{FS}}{\partial x_i} \right\| + \left\| \frac{\partial P_q}{\partial x_i} \right\| \right] & \quad (4) \end{aligned}$$

显然, $\|\partial P_q / \partial x_i\|$ 是有限的数。另一方面, 由于函数 $f_{FS}(x)$ 连续且分段可微, 因此 $\|\partial f_{FS} / \partial x_i\|$ 也是有限的数。从而 $\forall \epsilon > 0$, 当 $\max_{i=1}^n D_{MAX}^i$ 充分小时, 有

$$\begin{aligned} |f_{FS}(x) - P_q(x)| &= \\ \max_{i=1}^n D_{MAX}^i \left[\left\| \frac{\partial f_{FS}}{\partial x_i} \right\| + \left\| \frac{\partial P_q}{\partial x_i} \right\| \right] & < \epsilon \end{aligned}$$

即 $\forall \epsilon > 0$, 存在特定 Mamdani 模糊系统, 使得 $f_{FS}(x) - P_q(x) < \epsilon_0$ (证毕)

注 3 考察特定 Mamdani 模糊系统的任意第 $j (j = 1, 2, \dots, M)$ 条模糊规则, 根据假设 2, 特定 Mamdani 模糊系统采用的隶属函数都是连续且分段可微的, 因此第 j 条模糊规则的激活度 $\mu_j(x) =$

$\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i)$ 为连续且分段可微函数。当采用重心法解模糊时, 对任意输入矢量 x , 均有 $\sum_{j=1}^M \mu_j(x) > 0$, 因此式(2)给出的 $f_{FS}(\bullet)$ 也是连续且分段可微函数。

注 4 由于 $f_{FS}(\bullet)$ 是连续且分段可微函数, 因此在 $f_{FS}(\bullet)$ 的所有不可微点上, $f_{FS}(\bullet)$ 偏导数的上确界存在且有界。

注 5 要求 $\max_{i=1}^n D_{MAX}^i$ 充分小, 意味着要求每个

D_{MAX}^i 充分小。根据式(3)易得

$$D_{MAX}^i = \frac{1}{n_i + 1}$$

其中等号当且仅当 x_i 采用均匀分布的模糊子集, 且 $0 < C_1^i < C_2^i < \dots < C_{n_i}^i < 1$ 时成立。从而 $\min_{i=1}^n n_i$ 充分大, 即每个输入变量的模糊分割数充分多是 $\max_{i=1}^n D_{MAX}^i$ 充分小的必要条件。

定理 1 特定 Mamdani 模糊系统能以任意精度一致逼近紧致集 $U \subset R^n$ 上的任意连续实函数 $g(x)$, 即 $\forall \epsilon > 0$, 存在特定 Mamdani 模糊系统, 使得 $f_{FS}(x) - g(x) < \epsilon$, 其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 无穷范数 $\|\cdot\|_\infty$ 的定义同上。

证明 根据 Weierstrass 逼近定理^[13], 在 $U \subset R^n$ 上存在 q 次 n 元多项式函数 $P_q(x)$ 一致逼近任意连续实函数 $g(x)$, 即 $\forall \epsilon_1 > 0$, 存在 $P_q(x)$ 使得 $P_q(x) - g(x) < \epsilon_1$ 。

另一方面, $\forall \epsilon_2 > 0$, 根据引理 1, 存在特定 Mamdani 模糊系统, 使得 $f_{FS}(x) - P_q(x) < \epsilon_2$ 。不妨设 $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$, 从而有

$$\begin{aligned} f_{FS}(x) - g(x) &= \\ f_{FS}(x) - P_q(x) + P_q(x) - g(x) &= \\ f_{FS}(x) - P_q(x) + P_q(x) - g(x) &= \\ P_q(x) - g(x) &< \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon & \end{aligned}$$

(证毕)

4 特定 Mamdani 模糊系统一致逼近的充分条件

上节已证明了特定 Mamdani 模糊系统是通用逼近器, 那么对于给定的任意连续实函数。每个输入变量需要取多少个模糊子集以及如何设计隶属函数, 才能保证达到所需要的逼近精度? 本节将给出一个特定 Mamdani 模糊系统一致逼近的充分条件。

文献[14] 给出一组采用三角形隶属函数的模糊集全交叠的定义。这里对更一般的情况定义一组模糊集的广义全交叠。

定义 2(广义全交叠) 称论域 U 上的一组模糊集 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是广义全交叠的, 如果以下两个条件之一成立:

- 1) $n = 1$;
- 2) $n \geq 2, \inf S(A_i) = C_{i-1}, i = 2, 3, \dots, n;$
 $\sup S(A_j) = C_{j+1}, j = 1, 2, \dots, n-1$ 。

其中, C_k 为模糊集 A_k 的中心点, $k = 1, 2, \dots, n$; $S(\cdot)$ 为模糊集的支撑集^[15], 即

$$S(A) = \{x \mid \mu_A(x) > 0, x \in U\}$$

注 6 如果论域 U 上的一组模糊集 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是广义全交叠的, 则对任意 $x \in U$, 它至多对 2 个相邻模糊集 A_j 和 A_{j+1} 的隶属度大于零, 且此时必有 $C_j \leq x \leq C_{j+1}, j = 1, 2, \dots, n-1$ 。

假设 3 本文研究的特定 Mamdani 模糊系统, 其每个输入变量的模糊子集都是广义全交叠的。

以假设 1 和假设 3 为前提, 可推得特定 Mamdani 模糊系统一致逼近的充分条件。

引理 2 如果特定 Mamdani 模糊系统的所有输入变量定义为 n_0 个均匀分布的模糊子集, 则对任意给定 q 次 n 元多项式函数 $P_q(x)$ 和 $\epsilon > 0$, 存在特

定 Mamdani 模糊系统, 使得当 $n_0 > \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial P_q}{\partial x_i} \right\|$ 时, 有 $f^{\text{FS}}(x) - P_q(x) < \epsilon$ 。

证明略。

定理 2 如果特定 Mamdani 模糊系统的所有输入变量定义为 n_0 个均匀分布的模糊子集, 则对紧致集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上任意连续实函数 $g(x)$ 和 $\epsilon > 0$, 存在特

定 Mamdani 模糊系统, 使当 $n_0 > \frac{\mu}{\epsilon - \epsilon_1} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial P_q}{\partial x_i} \right\|$ 时, 有 $f^{\text{FS}}(x) - g(x) < \epsilon$, 其中 $\mu = \min |b - a|$, 使得 $C[U] \subseteq C^n[a, b]$, $C[U]$ 为在 U 上定义的全部连续实函数的集合; $0 < \epsilon_1 < \epsilon$, 且有 $g(x) - P_q(x) < \epsilon_1$ 。

证明略。

5 结 语

模糊系统的通用逼近性具有重要的理论和实际意义。本文研究采用模糊单点作为规则后件的特定 Mamdani 模糊系统的通用逼近性, 证明了特定 Mamdani 模糊系统是通用逼近器, 并给出特定 Mamdani 模糊系统一致逼近紧致集上任意连续实函数的充分条件。

参 考 文 献

- 1 L X Wang, J M Mendel. Fuzzy basis functions, universal approximation and orthogonal least square learning. IEEE Trans on Neural Networks, 1992, 3(5): 807~814
- 2 X J Zeng, M G Singh. Approximation theory of fuzzy systems — MIMO case. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1995, 3(2): 219~235

- 3 李锋, 钱清泉. 模糊系统及其通用性. 模糊系统与数学, 1998, 12(1): 45~49
- 4 J L Castro, M Delgado. Fuzzy systems with defuzzification are universal approximators. IEEE Trans on System, Man and Cybernetics, 1996, 26(1): 149~152
- 5 B Kosko. Fuzzy system as universal approximators. In: Proc IEEE Int Conf on Fuzzy Systems. San Diego, 1992. 1153~1162
- 6 L X Wang. Fuzzy systems are universal approximators. In: Proc IEEE Int Conf on Fuzzy Systems. San Diego, 1992. 1163~1170
- 7 J L Castro. Fuzzy logic controllers are universal approximators. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1995, 25(4): 629~635
- 8 S Abe, M S Lan. Fuzzy rules extraction directly from numerical data for function approximation. IEEE Trans on System, Man and Cybernetics, 1995, 25(1): 119~129
- 9 J A Dickerson, B Kosko. Fuzzy function approximation with ellipsoidal rules. IEEE Trans on System, Man and Cybernetics, 1996, 26(4): 542~560
- 10 H T Nguyen, V Kreinovich, O Sirisaengtaksin. Fuzzy control as a universal control tool. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 80(1): 71~86
- 11 H Ying. Sufficient conditions on general fuzzy systems as function approximators. Automatica, 1994, 30(3): 521~525
- 12 X J Zeng, M G Singh. Approximation accuracy analysis of fuzzy systems as function approximators. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1996, 4(1): 44~63
- 13 I N Bronshtein, K A Semendyayev. Handbook of mathematics. New York: Van Nostrand Reinhold, 1985
- 14 张乃尧. 特定模糊控制器的结构分析. 模糊系统与数学, 1997, 11(2): 10~21
- 15 孙增圻. 智能控制理论与技术. 北京: 清华大学出版社, 1997

作 者 简 介

曾珂男, 1975年生。1996年毕业于清华大学自动化系, 现为清华大学自动化系博士生。研究兴趣为模糊控制, 模糊神经网络, 智能机器人。

徐文立男, 1947年生。1970年毕业于清华大学电机系, 1990年在美国获博士学位, 现为清华大学自动化系教授, 博士生导师。研究兴趣为智能控制, 计算机视觉, 运动控制等。

张乃尧男, 1946年生。1970年毕业于清华大学电机系, 现为清华大学自动化系教授。研究兴趣为模糊控制, 模糊神经网络, 自适应控制, CIMS应用等。