一类相似组合大系统的线性反馈镇定*

张颖伟 王 剑 张嗣瀛
(东北大学信息科学与工程学院 沈阳 110006)

摘 要 研究相似组合大系统的二次镇定问题, 利用系统的特殊结构导出其二次可稳的条件及(分散)状态反馈控制律律的求解方法。其特点是只需求解两个低阶 Riccati 方程或不等式, 大大简化了控制器的设计。

关键词 相似组合系统, 二次镇定, 状态反馈, 控制律
分类号 TP 13

Linear State Feedback Stabilization for a Class of Large- scale Systems with Similar Composite Structure

Zhang Yingwei, Wang Jian, Zhang Siying
(Northeastern University)

Abstract The stability problems for similar composite systems are dissussed. The conditionrs of quadratic stabilization and/or decentralized quadratic stabilization are giren, and the method of design-ning state feedback control law is presented. The proposed method simplified the design of controller. Only two lower0order Riccati equations re needed to be sdved in the decign procedure.

Key words similar composite systems, quadratic stabilization, state fccdback, controllaw

1 引 言

相似组合系统广泛应用于生物系统、社会系统和管理系统等实际系统中。例如要建一个大的工程系统常用策略是制造几种较小的部件, 然后用互联块把子系统块联接起来, 以完成大系统的功能[1]。再如一个多机电厂由 N 个相同的发电机组均衡互联构成, 以互相交换电力, 而电厂又可与一个较大的电力系统相联[2,3]。

相似组合系统的基本结构特征是相应的子系统矩阵和耦合矩阵分别具有相似结构, 耦合矩阵每个位置的元素有界, 由这些元素的界形成的矩阵也具有相似结构。近年来, 许多学者用代数 Riccati 方程方法研究线性系统的二次可稳性问题, 得到一些研究成果[4~6]。特别是文献[7] 对具有绝对值有界的耦合矩阵线性系统给出了二次可稳的条件, 但由于系统的高维性, 直接应用[7] 的结果非常困难。

本文利用相似组合系统特殊的结构特征, 不仅导出其二次可稳的条件, 而且导出其(分散) 状态反馈控制律的求解方法。

2 标记与引理

本文考虑的相似组合大系统是由 N 个相同子系统和一个外部系统通过相似的方式互联而成。相似组合系统的数学描述为

$$\dot{x} = (A + H)x + Bu \tag{1}$$

其中

$$x(t) = x = [x_0^T \quad x_1^T \quad \cdots \quad x_N^T]^T$$
$$x_0 = x_0(t) \in R^{n_0}, \quad x_i = x_i(t) \in R^n$$
$$u(t) = u = [u_0^T \quad u_1^T \quad \cdots \quad u_N^T]^T$$
$$u_0 = u_0(t) \in R^{m_0}, \quad u_i = u_i(t) \in R^m$$

* 国家自然科学基金项目(69774005) 和教育部博士点专项基金项目
1998- 11- 23 收稿, 1999- 03- 31 修回

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & L_0 & L_0 & \cdots & L_0 \\ M_0 & A_1 & H_1 & \cdots & H_1 \\ M_0 & H_1 & A_1 & \cdots & H_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_0 & H_1 & H_1 & \cdots & A_1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$B = \mathrm{diag}[B_0 \quad B_1 \quad \cdots \quad B_1] \quad (3)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & F_1 & F_2 & \cdots & F_N \\ U_1 & 0 & H_{12} & \cdots & H_{1N} \\ U_2 & H_{21} & 0 & \cdots & H_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_N & H_{N1} & H_{N2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

满足

$$|(F_i)_{ls}| < (E_1)_{ls}, \quad |(U_i)_{ls}| < (E_2)_{ls}$$
$$|(H_{ij})_{ls}| < (E_4)_{ls}$$

式中, $i = 1, \cdots, N$; $j = 1, \cdots, N$; $l = 1, \cdots, n$; $s = 1, \cdots, n$。

寻找 E_0, E_3 使得

$$E = \begin{bmatrix} E_0 & E_1 & E_1 & \cdots & E_1 \\ E_2 & E_3 & E_4 & \cdots & E_4 \\ E_2 & E_4 & E_3 & \cdots & E_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_2 & E_4 & E_4 & \cdots & E_3 \end{bmatrix}$$

是正定矩阵。

记

$$A_m = A_1 - H_1, \quad B_p = \mathrm{diag}[B_0 \quad B_1]$$
$$Q_p = \mathrm{diag}[I_{n_0} \quad NI_n], \quad A_{p0} = A_1 + (N-1)H_1$$
$$A_p = \begin{bmatrix} A_0 & NL_0 \\ M_0 & A_1 + (N-1)H \end{bmatrix}$$
$$E_p = \begin{bmatrix} E_0 & NE_1 \\ E_2 & E_3 + (N-1)E_4 \end{bmatrix}$$
$$E_m = E_3 - E_4, \quad E_{p0} = E_3 + (N-1)E_4$$

称方程(1) 描述的系统为 Σ_u。

定义 1 称系统 Σ_u(其中 $u(t) = 0$) 是二次稳定的, 是指存在一个对称正定矩阵 P 和一个常数 $\alpha > 0$, 使得对于所有的 $(x,t) \in R^{n_0+N_n} \times R$ Lyapunov 函数 $V(x) = x^{\mathrm{T}}$ 的导数满足 $\mathring{V}(x, t) \leq -\alpha \| x \|^2$。

定义 2[3] 称由方程(1) 描述的系统是可通过线性状态反馈二次可稳的, 是指存在一个状态反馈控制 $u(t) = -Kx(t)$, 使得寻致闭环系统是二次稳定的; 如果 K 具有对角结构, 则称系统是分散二次可稳的。

设

$$Y(A, P, \epsilon) = A^{\mathrm{T}}P + PA - P(BB^{\mathrm{T}} - \epsilon I)P + \frac{n}{\epsilon}\mathrm{diag}H^{\mathrm{T}} + \epsilon I \quad (5)$$

如果将耦合矩阵的元素看成不确定的, 则据文献[7] 中定理 1 可得如下结果:

引理 1 如果存在 $\epsilon > 0$ 及正定对称矩阵 P, 使得 $Y(A, P, \epsilon) = 0$, 则系统 Σ_u 的闭环系统是二次可稳的, 并且状态反馈控制律为 $u = -B^{\mathrm{T}}Px$。

引理 2 设矩阵 $X \in R^{l\times s}$, $Y \in R^{l\times s}$, $\epsilon > 0$, 则有

$$X^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}X \leq \epsilon X^{\mathrm{T}}X + \frac{1}{\epsilon}Y^{\mathrm{T}}Y$$

引理 3 如果 $A < B$, 则 $A^{\mathrm{T}}A \leq n\,\mathrm{diag}(B^{\mathrm{T}}B)$。通过计算可得如下引理:

引理 4

$$T(l, f, 1) = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & I_f \end{bmatrix} \in R^{(l+f)\times(l+f)}$$

$$T(l, f, s) = \begin{bmatrix} I_l & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_f & -I_f & -I_f & \cdots & -I_f \\ 0 & I_f & I_f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_f & 0 & I_f & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & I_f & 0 & 0 & \cdots & I_f \end{bmatrix} \in R^{(l+f_s)\times(l+f_s)} \quad (6)$$

令 $T = [T(0) \quad T(1) \quad \cdots \quad T(N-1)] \in R^{(n_0+N_n)\times(n_0+N_n)}$ (7)

其中

$$T(i) = \mathrm{diag}[T(n_0, n, (N-i)) \quad I_n \quad \cdots \quad I_n]$$
$$T^{-1}AT = \mathrm{diag}[A_p \quad A_m \quad \cdots \quad A_m]$$
$$T^{-1}HT = \mathrm{diag}[E_p \quad E_m \quad \cdots \quad E_m]$$
$$T^{\mathrm{T}}HT = \mathrm{diag}[E_p \quad N(N-1)E_m \cdots 6E_m \quad 2E_m]$$
$$T^{\mathrm{T}}BT = \mathrm{diag}[B_0 \quad N(N-1)B_1 \cdots 6B_1 \quad 2B_1]$$
$$T^{-1}BT = \mathrm{diag}\left[B_0 \quad \frac{1}{N}B_1 \quad \cdots \quad \frac{1}{6}B_1 \quad \frac{1}{2}B_1\right]$$

$T(n_0, n, (N-i))$ 由工(6) 给出。

尽管引理 1 给出一个关于系统 Σ_u 闭环系统二次可稳的充分条件, 但由于涉及高阶代数 Riccati 方程的求解, 所以这一条件的检验及反馈控制律的求解都非常困难。为此, 下面给出容易检验的条件以及(分散) 状态反馈控制律的求解方法。

3 主要结果

设

$$Y_p(A_p, P_p, \epsilon) = A_p^{\mathrm{T}}P_p + P_pA_p - P_p(B_pB_p^{\mathrm{T}} - \epsilon I)P_p + \frac{n}{\epsilon}\mathrm{diag}\,E_p^{\mathrm{T}}E_p + \epsilon Q_p \tag{8}$$

$$Y_m = (A_m, P_m, \epsilon) = A_m^{\mathrm{T}}P_m + P_mA_m - P_m(B_1B_1^{\mathrm{T}} - \epsilon I)P_m + \frac{n}{\epsilon}\mathrm{diag}\,E_m^{\mathrm{T}}E_m + \epsilon Q_n \tag{9}$$

定理 1 对于由方程(1)描述的系统Σ_u，如果存在$\epsilon > 0$，正定对称矩阵$P_m \in R^{n\times n}$，以及

$$P_p = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} \in R^{(n_0+n)\times(n_0+n)}$$

使得

$$\begin{cases} Y_m(A_m, P_m, \epsilon) = 0 \\ Y_p(A_p, P_p, \epsilon) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

则系统Σ_u的闭环系统是二次可稳的，并且状态反馈控制律为$u = -B^{\mathrm{T}}Px$。其中

$$P = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{01} & \cdots & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{12} \\ g_{10} & g_{12} & g_{11} & \cdots & g_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{10} & g_{12} & g_{12} & g_{12} & g_{11} \end{bmatrix} \tag{11}$$

式中

$$g_{00} = P_{00},\ g_{01} = \frac{1}{NP_{01}},\ g_{10} = \frac{1}{NP_{10}}$$

$$g_{11} = \frac{P_{11} + N(N-1)P_m}{N^2},\ g_{12} = \frac{P_{11} - NP_m}{N^2}$$

证明 由矩阵P的定义(11)知P是对称的，利用引理4定义的T，有

$$T^{\mathrm{T}}PT = \mathrm{diag}[P_p \quad N(N-1)P_m \quad \cdots \quad 6P_m \quad 2P_m]$$

由定理1的假设，P_p，$P_m > 0$，对称矩阵P是正定的。则由引理2，引理4可得

$$T^{\mathrm{T}}Y(A,P)T = T^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(T^{\mathrm{T}})^{-1}T^{\mathrm{T}}PT + T^{\mathrm{T}}PTT^{-1}AT - T^{\mathrm{T}}PTT^{-1}(BB^{\mathrm{T}} - \epsilon I)(T^{-1})^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}PT + \frac{n}{\epsilon}T^{\mathrm{T}}(\mathrm{diag}\,E^{\mathrm{T}}E + \epsilon I)T = \mathrm{diag}[Y_p(A_p, P_p) \quad N(N-1)Y_m(A_m, P_m) \quad \cdots \quad 2Y_m(A_m, P_m)] = 0$$

由于矩阵是非奇异的，所以$Y(A,P) = 0$。由引理1可推出系统Σ_u是二次稳定的。(证毕)

定理 2 对于由方程(1)描述的系统Σ_u，如果存在$\epsilon > 0$，正定对称矩阵$P_m \in R^{n\times n}$及$P_0 \in R^{n_0\times n_0}$，使得

$$\begin{cases} Y_m(A_m, P_m, \epsilon) \le 0 \\ Y_p(A_p, P_p, \epsilon) \le 0 \end{cases} \tag{12}$$

其中，$P_p = \mathrm{diag}[P_0 \quad NP_m]$，则系统$\Sigma_u$的闭环系统是分散二次可稳的，并且分散状态反馈控制律为

$$K = -\mathrm{diag}[B_0^{\mathrm{T}}P_0 \quad B_1^{\mathrm{T}}P_m \quad \cdots \quad B_1^{\mathrm{T}}P_m] \tag{13}$$

证明类似于定理1的证明。

推论 1 假定系统Σ_u不含外部系统，如果存在$\epsilon > 0$，正定对称矩阵$P_m \in R^{n\times n}$及$P_{p0} \in R^{n\times n}$，使得

$$\begin{cases} Y_m(A_m, P_m, \epsilon) = 0 \\ Y_m(A_{p_0}, P_{p_0}, \epsilon) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

其中$A_{P_0} = A_1 + (N-1)H_1$，则系统Σ_u的闭环系统是二次可稳的，并且状态反馈控制律$u = -B^{\mathrm{T}}P_*x$。其中

$$P_* = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_2 \\ h_2 & h_1 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_2 & h_2 & \cdots & h_1 \end{bmatrix}$$

$$h_1 = \frac{1}{N[P_{p_0} + (N-1)P_m]}$$

$$h_2 = \frac{1}{N(P_{p_0} - P_m)}$$

证明类似于定理1的证明。

推论 2 假定系统Σ_u不含外部系统，如果存在$\epsilon > 0$，正定对称矩阵$P_m \in R^{n\times n}$，使得

$$\begin{cases} Y_m(A_m, P_m, \epsilon) \le 0 \\ Y_m(A_{p_0}, P_m, \epsilon) \le 0 \end{cases} \tag{15}$$

其中$A_{P_0} = A_1 + (N-1)H_1$，则系统Σ_u的闭环系统是分散二次可稳的，并且分散状态反馈控制律为

$$K = -\mathrm{diag}[B_1^{\mathrm{T}}P_m \quad \cdots \quad B_1^{\mathrm{T}}P_m] \tag{16}$$

证明类似于定理2的证明。

4 结 论

本文给出了系统Σ_u是二次可稳的及分散二次可稳的检验条件和反馈控制律的求解方法，其特点是只需求解两个低阶的 Riccati 方程或不等式。此外，本文给出的定理并未因计算方法上的简化而带来新的保守性。

(下转第 468 页)

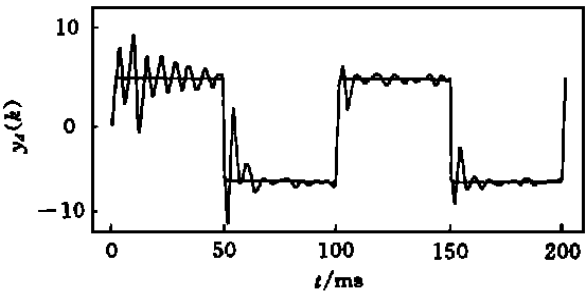

图 2　最小方差控制系统的响应曲线

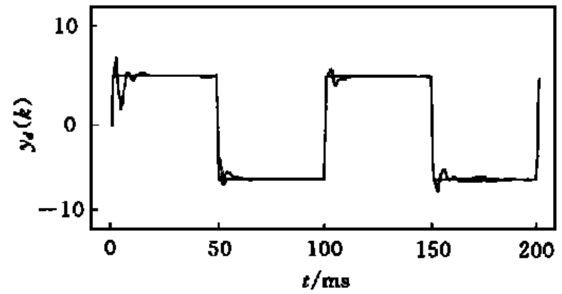

图 3　最小方差神经控制系统的响应曲线

输入为 $u = u_0 + \Delta u$, u_0 为标称模型(4.1) 的控制器(4.3)。

本文对实际系统(4.2) ($\epsilon = 0.6$) 分别在最小方差控制和最小方差神经控制下, 对方波信号(幅值为±5,周期为100) 的跟踪情况进行仿真,其结果如图 2 和图 3 所示。

由仿真结果可以看出,当系统存在非线性不确定性时,基于线性模型的最小方差控制的响应曲线振荡较大,控制效果不佳。而本文提出的最小方差神经控制通过神经网络的补偿作用,使得系统响应快,稳态误差小,具有较强的鲁棒性和良好的动态响应。

参 考 文 献

1 Bittanti S, Piroddi L. GMV technique for nonlinear control with neural networks. IEE Proc D, 1994, 14(2): 57～69

2 Bittanti S, Piroddi L. Neural implementation of GMV control schemes based on affine input/output models. IEE Proc D, 1997, 14(6): 521～530

3 F C Chen, H K Khalil. Adaptive control of nonlinear systems using neural networks —— A dead-zone approach. In: Proc of ACC. Boston, 1991. 667～672

作 者 简 介

牛玉刚　男, 1964 年生。南京理工大学动力学院博士研究生。研究领域为复杂系统建模, 自适应控制, 神经网络控制。

杨成梧　男, 1936 年生。南京理工大学教授, 博士生导师。研究领域为复杂系统, 高速采样控制, 信号处理等。

赵建丛　女, 1966 年生。河北农业大学讲师。研究领域为非线性系统辨识, 神经网络理论等。

(上接第 457 页)

参 考 文 献

1 Barmish B R. Stabilization of uncertain systems via linear control. IEEE Trans on Autom Contr, 1983, 28: 848～850

2 Schmitendorf W E. Design methodology for robust stabilizing controllers. J Guidance, 1987, 10: 250～254

3 Barmish B R. Necessary and sufficient condition for quadratic stabilizability of uncertain linear systms. J Optim Theory Appl, 1985, 46(2): 389～408

4 Wonham W M. Linear multivariable control: A geometric approach. Berlin: Springer-Verlag, 1979

5 Anderson B D, Clements D J. Algebraic characterization of eixed modes in decentralized control. Automatica, 1981, 17(5): 703～712

6 Geromel J C, Cruz J J. On the robustness of optimal regulators for nonlinear discrete-time systems. IEEE Trans on Autom Contr, 1987, 32(8): 703～710

7 Driss M, Mohammed A H, Francois P. Robustness and optimality of linear quadratic sontroller for uncertain systems. Automatica, 1996, 32(7): 1081～1083

作 者 简 介

张颖伟　女, 1969 年生。东北大学自动控制理论及应用专业博士研究生。研究方向为相似组合大系统。

王　剑　男, 1957 年生。1990 年东北大学信息科学与工程学院获硕士学位, 现为东北大学副教授。研究方向为相似组合大系统。

张嗣瀛　见本刊本期第 422 页。