

基于凸优化和投影原理的降阶 控制器设计方法研究*

孙秀霞

毛剑琴

(空军工程大学工程学院 西安 710038) (北京航空航天大学第七研究室)

摘要 提出一种将凸优化算法和投影原理相结合的降阶控制器设计新方法。证明了降阶控制器保证系统稳定的一个充分条件,并给出了投影误差引起的系统性能变化的范围估计。该方法为系统的 H_∞ 性能指标与控制器期望阶次间的折中设计提供了一条可行途径。

关键词 线性矩阵不等式(LMI), H_∞ 控制, 降阶控制器设计

分类号 TP 301

Study on the Method of Reduced Controller Design Based on Convex Optimization and Projection

Sun Xiuxia

Mao Jianqin

(Air-force College of Engineering) (Beijing University of Aeronautics & Astronautics)

Abstract A new method using convex optimization and projection is proposed to design the low-order controller. A sufficient condition to guarantee closed-loop stabilization is provided, and the change of performance from projection error is estimated. There is a trade-off way between the order of controller and H_∞ performance. A simulation example shows the advantages of this method.

Key words linear matrix inequality(LMI), H_∞ control, low-order controller design

1 引言

考虑如下线性时不变连续动态系统及其输出反馈控制器

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \\ z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y = C_2x + D_{21}w \\ \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c + D_c y \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x(t) \in R^n$ 是广义对象的状态向量, $u(t) \in R^k$ 是控制输入, $w(t) \in R^{n_w}$ 是外部输入, $z(t) \in R^{n_z}$ 是被调节输出, $y(t) \in R^{n_y}$ 是测量输出, $x_c \in R^k$ 是控制器状态向量。

给定一个正数 γ , 寻找一个 k 阶控制器, 使闭环系统内稳定, 且从 w 到 z 的传递函数满足

$$P_{zw} < \gamma.$$

定理 1^[1,2] 下列叙述是等价的:

- 1) 存在一个 k 阶 H_∞ 次优控制器;
- 2) 存在对称矩阵 $X > 0$ 和 $Y > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX + XA^T + B_1B_1^T & XC_1^T \\ C_1X & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^T < 0 \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} YA + A^T Y + C_1^T C_1 & YB_1 \\ B_1^T Y & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^T < 0 \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succ 0 \quad (4)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} = n + k \quad (5)$$

其中, E 定义为 $E E = 0$ 且 $E E^T > 0$, E^T 表示 E 的共轭转置, k 为降阶控制器的阶次。

* 高等学校博士点专项科研项目(9603)

式(5)自然满足。但对降阶控制器(0 < k < n)的情况,(X, Y)的求解不再是凸的,因为秩条件(5)在参数空间(X, Y)非凸。该问题可用如下的非凸优化描述。

$$\min_{X, Y > 0} \text{rank} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\text{满足 LMI 约束: (2) ~ (4)} \quad (7)$$

对于这样的非凸优化问题,目前还没有找到一般的解决方法。

2 主要结果

为了避开非凸问题的求解,考虑如下问题: 对

于对称矩阵 $M \succ 0$, 有 $\sigma_i = \text{trace}(M)$, 其中 σ_i 为 M 的第 i 个奇异值。可以看出, $\text{trace}(M)$ 的值越小, M 的秩就可能越小。因此进行如下优化

$$\min_{X, Y > 0} \text{trace} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\text{满足 LIM 约束: (2) ~ (4)} \quad (9)$$

文献[3]给出了保证这两种最优化问题等价的条件,即保证可行解集合是超半网格结构。但在一般情况下这一条件不满足,由式(8),(9)优化得到的结果有一定的保守性。如要得到阶次更低的控制器,则需用到下面的推论:

推论 1^[4] 设 $W \in \Phi$, Φ 是半正定对称矩阵的集合,令 $W = U\Sigma V^T$ 是 W 的奇异值分解。则 W 向集合 $\mathcal{B} = \{W \in \Phi | \text{rank} W = k\}$ 的投影由 $W^* = U\Sigma_k V^T$ 给出。其中 Σ_k 是 Σ 中 $n - k$ 个最小奇异值用零代替后得到的对角阵。

定理 2 设 (X, Y) 是满足线性矩阵不等式(2)~(4)的一组可行解。记 $M = X - Y^{-1} \succ 0$, 其奇异值分解为 $M = U\Sigma V^T$, 其中 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ 。记 M^* 是 M 向秩为 k 的参数空间的投影,即 $M = M^* + E$, $E = U \text{diag}(0, \dots, 0, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n) U^T$ 。当 σ_{k+1} 满足如下不等式

$$-\sigma_{k+1} C_2^T [EA + A^T E] C_2^T \prec -\epsilon I \quad (10)$$

时,则由 M^* 得到的 k 阶控制器仍能保证闭环系统稳定,其中 $\epsilon > 0$ 且满足

$$C_2^T [YA + A^T Y] C_2^T \prec -\epsilon I < 0$$

$$E = (Y^{-1} + E)^{-1} [I - (Y^{-1} + E)^{-1} E]^{-1} (Y^{-1} + E)^{-1}$$

证明 设被控对象和控制器状态方程如式(1)

所示,其闭环系统状态矩阵为

$$A_d = \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = A_0 + B_0 G C_0 \quad (11)$$

式中, $G = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}$ 是控制器参数矩阵,其余矩阵只与开环对象参数有关。由 Lyapunov 稳定性理论知,系统稳定的充要条件是存在一个正定矩阵 P , 使得

$$A_d P + P A_d^T \prec 0 \quad (12)$$

设已知存在 P 满足式(12),现证投影有误差时得到的 P^* 仍然满足系统稳定的条件。设 (X, Y) 满足式(2)~(4),记 $(X - Y^{-1})$ 的投影为 $(X - Y^{-1})^*$,由文献[2]知, P 及 P^* 的构造如下

$$P = \begin{bmatrix} X & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}, \quad P^* = \begin{bmatrix} X & P_{12}^* \\ P_{12}^{*T} & P_{22}^* \end{bmatrix}$$

其中, P_{12}, P_{22} 和 P_{12}^*, P_{22}^* 分别是满足 $P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}^T = X - Y^{-1} \succ 0$ 和 $P_{12}^* P_{22}^{*-1} P_{12}^{*T} = (X - Y^{-1})^* \succ 0$ 的任意正定矩阵。为计算方便,一般取 $P_{22} = I_n, P_{22}^* = I_k (n > k)$ 。将式(11)代入(12),得

$$A_0 P + P A_0^T + B_0 G C_0 P + (B_0 G C_0 P)^T \prec 0 \quad (13)$$

记

$$Q = A_0 P + P A_0^T, \quad C = C_0 P, \quad B = B_0$$

则式(13)变为

$$Q + BGC + C^T G^T B^T \prec 0 \quad (14)$$

式(14)可解等价于下面的不等式可解^[4]。

$$B Q B^T \prec 0, \quad C^T Q C^T \prec 0 \quad (15)$$

$$B Q B^T = B_0 (A_0 P + P A_0^T) B_0^T = B_2 (A X + X A^T) B_2^T \prec 0 \quad (16)$$

式(16)与 P 无关,因此当 P 满足式(16)时, P^* 也满足式(16)。

由于系统稳定时有 $C^T Q C^T \prec 0$, 故一定存在一个 $\epsilon > 0$, 使得 $C^T Q C^T - \epsilon I \prec 0$, 即

$$C^T Q C^T = (P C_0^T) Q (P C_0^T)^T = C_2^T [(X - P_{12} P_{12}^{-1})^{-1} A + A^T (X - P_{12} P_{12}^{-1})^{-1}] C_2^T - \epsilon I \prec 0 \quad (17)$$

因为

$$P_{12} P_{12}^T = X - Y^{-1} = U \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) U^T = (X - Y^{-1})^* + E = P_{12}^* P_{12}^{*T} + E \succ 0 \quad (18)$$

其中

$$E = U \text{diag}(0, \dots, 0, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n) U^T$$

$$(X - Y^{-1})^* = U \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0) U^T$$

则

$$(X - P_{12}P_{12}^T)^{-1} = (X - P_{12}^*P_{12}^{*T})^{-1} + (X - P_{12}^*P_{12}^{*T})^{-1}E \times [I - (X - P_{12}^*P_{12}^{*T})^{-1}E]^{-1}(X - P_{12}^*P_{12}^{*T})^{-1}$$

代入式(17)得

$$C^T Q C^T T = C_2^T [(X - P_{12}^*P_{12}^{*T})^{-1}A + A^T(X - P_{12}^*P_{12}^{*T})^{-1}]C_2^T T + C_2^T (E_1A + A^TE_1)C_2^T T - \epsilon I < 0 \tag{19}$$

式中

$$E_1 = (Y^{-1} + E)^{-1}E[I - (Y^{-1} + E)^{-1}E]^{-1}(Y^{-1} + E)^{-1} \sigma_{k+1}(Y^{-1} + E)^{-1}[I - (Y^{-1} + E)^{-1}E]^{-1}(Y^{-1} + E)^{-1}$$

记

$$E = (Y^{-1} + E)^{-1}[I - (Y^{-1} + E)^{-1}E]^{-1}(Y^{-1} + E)^{-1}$$

由式(19)知,当

$$-\sigma_{k+1}C_2^T [EA + A^TE]C_2^T T < \epsilon I \tag{20}$$

成立时,有 $C^T Q C^T T < 0$, 此时由 P^* 构成的 k 阶控制器能保证闭环系统稳定。(证毕)

定理3 如果记

$$\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

X^* 和 $(Y^{-1})^*$ 分别为 X 和 Y^{-1} 的投影, $E_x = X - X^*$, $E_y = Y^{-1} - (Y^{-1})^*$ 。则由投影误差引起系统的 H 性能变化为

$$\Delta Y = \max\{\Delta Y_x, \Delta Y_y\} \tag{21}$$

式中

$$\Delta Y_x = [W_2^T W_2]^{-1} [W_1^T (AE_x + E_x A^T) W_1 + W_2^T C_1 E_x W_1 + W_1^T E_x C_1^T W_2]$$

$$\Delta Y_y = [U_2^T U_2]^{-1} [U_1^T (AE_y + E_y A^T) U_1 + U_2^T C_1 E_y U_1 + U_1^T E_y C_1^T U_2]$$

证明 将 X, Y^{-1} 及其投影 $X^*, (Y^{-1})^*$ 分别代

入式(2), (3) 并相减, 得

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AE_x + E_x A^T + B_1 B_1^T & E_x C_1^T \\ C_1 E_x & \Delta Y_x I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AE_y + E_y A^T + B_1 B_1^T & E_y C_1^T \\ C_1 E_y & \Delta Y_y I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{23}$$

将上面二式分别展开并整理, 即可得到所证结果。

(证毕)

3 算 例

已知受控对象为某变频调速电动机-发电机组^[5]。线性化后, 对象的数学模型为

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.6}{0.4s^2 + 8s + 16} & 0 \\ \frac{1.6I_{FO}}{0.4s^2 + 8s + 1.6} & \frac{\omega_{EO}}{s + 1} \end{bmatrix}$$

其中, $I_{FO} = [0.2, 1.0]$, $\omega_{EO} = [0.2, 1.0]$ 。考虑乘性摄动, 取与文献[5]相同的加权矩阵, 其全阶最优 H 控制器为5阶。

利用本文方法, 在投影误差为零时得到保持最优 H 性能的3阶控制器, 当投影误差为1.0065和2.1327时, 分别得到2阶和1阶控制器, 闭环阶跃响应如图1所示。图中 y_1 代表输出电压的幅值, y_2 代表输出电压的频率, k_c 为控制器的阶次。由于 y_2 在3种情况下的响应曲线几乎重合, 这里只给出 y_1 的响应曲线。图中曲线①: $I_{FO} = 0.2, \omega_{EO} = 0.2, k_c = 3$; 曲线②: $I_{FO} = 0.2, \omega_{EO} = 0.2, k_c = 2$; 曲线③: $I_{FO} = 0.2, \omega_{EO} = 0.2, k_c = 1$ 。

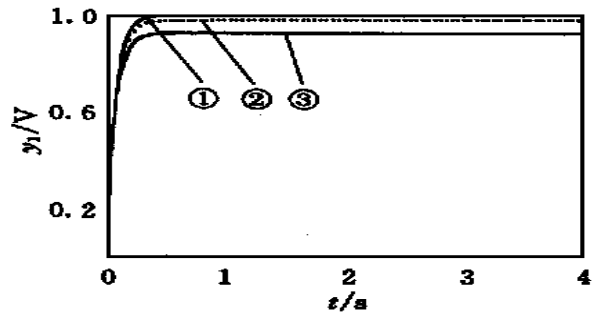


图1 闭环输出仿真结果

从图中可以看出, 3阶控制器控制效果好, 2阶和1阶控制器仍能使系统稳定, 但稳态误差增大。如果实际情况允许性能指标放宽, 可考虑采用2阶或1阶控制器。

4 结 语

本文提出一种基于凸优化和投影原理的降阶控制器设计, 同时证明了降阶控制器保证系统稳定的一个充分条件, 并给出投影误差引起的系统性能变化范围。用该方法既能设计保持 H 性能的降阶控制器, 也可设计更低阶次但性能指标放宽的控制器, 为性能指标与控制器阶次之间的折中设计提供了一条可行途径。设计实例说明了本文方法的有效性。

(下转第484页)

$$\lambda = \frac{\lambda_{\min}(Q) - 2\sigma\lambda_{\max}(P)}{2\lambda_{\max}(P)} > 0$$

显然,由式(14)可得 $\lim_t |y - y_d| = 0$,即闭环系统的输出 $y(t)$ 渐近跟踪期望轨迹 $y_d(t)$,并且状态 ξ 有界。由文献[6]知,不可观测状态 η 也是有界稳定的。结合状态 ξ 的有界性,即得系统(10)的状态有界。再由 T^{-1} 是微分同胚,即知系统(1)和控制器(9)构成的闭环系统是状态有界的。(证毕)

4 结 语

在实际工程中,对非线性系统建立精确的模型常常较为困难甚至是不可能的,因此研究不确定条件下非线性系统的控制问题具有重要的实际意义。本文针对一类具有非匹配不确定性的非线性时变系统,通过引入非线性时变系统的相对阶,探讨了系统的输出跟踪鲁棒控制问题,设计了一种基于标称系统和不确定性上界的连续型鲁棒输出跟踪控制器。利用该方案设计的控制器不仅可保证整个闭环系统是一致有界稳定的,而且闭环输出可以渐近跟踪期望的轨迹。

参 考 文 献

- 1 Elmali H, Olgac N. Robust output tracking control of nonlinear MIMO systems via sliding mode technique. *Automatica*, 1992, 28(1): 145 ~ 151
- 2 Qu Zihua. Robust control of nonlinear uncertain systems without generalized matching conditions. *IEEE*

Trans on Autom Contr, 1995, 40(6): 1446 ~ 1453

- 3 梅生伟,秦化淑.一类非线性时变不确定系统的镇定. *控制与决策*, 1996, 11(5): 533 ~ 537
- 4 Cheng D Z, Yun X P. Linearization of time-varying affine nonlinear systems. *Syst Sci & Math Scis*, 1988, 1(2): 119 ~ 130
- 5 Yaz E. Stabilizing compensator design for uncertain nonlinear systems. *Syst & Contr Lett*, 1993, 21(1): 11 ~ 17
- 6 Sastry S, Isidori A. Adaptive control of linearizable systems. *IEEE Trans on Autom Contr*, 1989, 34(11): 1241 ~ 1253

作 者 简 介

向峥嵘 男,1969年生。1998年在南京理工大学获博士学位,现为该校自动化系讲师。研究方向为非线性控制系统,鲁棒控制,神经网络等。

朱瑞军 男,1968年生。1998年在东北大学自动化研究中心获博士学位,现在南京理工大学做博士后研究。研究方向为非线性系统的鲁棒控制和观测器设计,非线性系统的智能控制理论及应用等。

陈庆伟 男,1963年生。1988年在南京理工大学获工学硕士学位,现为该校自动化系高级工程师。研究方向为智能控制理论及应用,计算机控制系统等。

胡维礼 男,1941年生。1965年毕业于清华大学自控系,1981年在南京理工大学获硕士学位,现为该校自动化系教授,博士生导师。研究方向为非线性控制系统,自适应控制,智能控制理论及其应用等。

(上接第460页)

参 考 文 献

- 1 T Iwasaki, R E Skelton. All controller for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 1994, 30(8): 1307 ~ 1317
- 2 Gahinet P, P Apkarian. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *Int J Robust Nonlinear Control*, 1994, 4(3): 421 ~ 448
- 3 M Mesbahi, G P Papavassilopoulos. On the rank minimization problem over a positive semidefinite linear matrix inequality. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(2): 239 ~ 243
- 4 Karolos M Grigoriadis, Robert E Skelton. Low-order control design for LMI problems using alternating projection methods. *Automatica*, 1996, 32(8): 1117 ~ 1125

- 5 Xiuxia Sun, Jianqin Mao, T S Chang. Application of H_∞ method to robust design for fast following synchronizer generators. In: *Proc of ASCC 97*. Seoul, 1997. 583 ~ 586

作 者 简 介

孙秀霞 女,1962年生。空军工程大学工程学院副教授,工学博士。主要研究方向为鲁棒控制, H_∞ 控制及其应用。

毛剑琴 女,1940年生。中国自动化学会常务理事,北京航空航天大学教授,工学博士。主要研究方向为智能控制与智能辨识理论及应用,鲁棒控制与自适应控制理论及应用。