

# 基于双线性模型的连续时间非线性 最优控制的 DISOPE 算法\*

李俊民 邢科义

万百五

(西安电子科技大学应用数学系 710071) (西安交通大学系统工程研究所)

**摘 要** 对连续时间非线性最优控制问题提出了基于双线性二次型问题的 DISOPE 算法。在模型与实际存在差异的情况下,通过求解修正的基于双线性模型的优化问题和参数估计问题,给出了实际问题的最优解。提出了求解非齐次双线性二次型问题的迭代算法,分析了该算法的收敛性。仿真结果表明该算法比现有算法有更好的收敛特性。

**关键词** 双线性模型,非线性动态系统,迭代算法,收敛性

**分类号** TP 273

## DISOPE Algorithm of Optimal Control Based on Bilinear Model for Nonlinear Continuous-time Systems

Li Junmin, Xing Keyi

Wan Baiwu

(Xidian University)

(Xi'an Jiaotong University)

**Abstract** The algorithm of optimal control for continuous-time nonlinear dynamic systems, which is called the dynamic integrated system optimization and parameter estimation (DISOPE), was proposed according to the differences between real system and it represented bilinear model. The optimal solution of real control can be obtained by means of iteratively solving the optimization problem based on bilinear model and parameter estimation problem. An iterative algorithm for solving non-homogenous bilinear-quadratic problem is also given, and the convergence of the algorithm is proved. The simulation example shows that the algorithm has better convergent features than existing algorithm.

**Key words** bilinear model, nonlinear dynamic systems, iterative algorithm, convergence

### 1 引 言

Roberts 对非线性最优控制问题提出一种动态系统优化与参数估计集成(DISOPE)方法<sup>[1,2]</sup>。该方法通过迭代求解系统优化与参数估计问题,不管模型与实际的差异,能获得实际问题的最优解。文献[3]对离散时间非线性最优控制问题,提出了基于双线性模型的动态系统优化与参数估计集成算法。

本文针对连续时间双线性模型及其代表的实际对象之间存在的差异,提出一种基于双线性模型的 DISOPE 算法,通过迭代求解修正的基于双线性模型

的优化问题和“点”参数估计问题,得到实际问题的最优解。在 DISOPE 算法的每次迭代中,需要求解一个非齐次双线性两点边值问题,而此问题的求解尚无有效的方法。针对这一困难,本文推广了文献[4]的算法,对连续时间非齐次双线性二次型问题提出一种迭代算法,从而使所提出的基于双线性模型的 DISOPE 算法在计算上易于实现。仿真实例表明本文算法具有较好的收敛特性。

### 2 基于双线性模型的 DISOPE 算法

考虑实际非线性最优控制问题

$$\min \left[ \Phi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L^*(x(t), u(t), t) dt \right]$$

$$\text{s. t. } \dot{x}(t) = f^*(x(t), u(t), t)$$

\* 国家自然科学基金项目(69674003)

$$x(t_0) = x^0 \quad (1)$$

其中,  $L^*(\cdot, \cdot, \cdot): R^n \times R^m \times R$   $R$  是实际性能指标,  $f^*(\cdot, \cdot, \cdot): R^n \times R^m \times R$   $R^n$  是实际动态;  $x(t), u(t)$  分别为  $n$  维和  $m$  维状态和控制向量,  $x_0$  为已知的初始状态,  $t_f$  为终止时间。

由于  $f^*, L^*$  的复杂性, 问题(1) 是难以求解的。考虑如下简单的基于双线性模型的优化问题

$$\begin{aligned} \min & \left\{ \frac{1}{2} x^T(t_f) \Phi x(t_f) + 2\mathcal{Y}(t_f) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [u^T(t) R u(t) + x^T(t) Q x(t) + 2\mathcal{Y}(t)] dt \right\} \\ \text{s. t. } & \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + \{x(t) N\} u(t) + \\ & \alpha(t), \quad x(t_0) = x^0 \end{aligned} \quad (2)$$

这里

$$\{x(t) N\} = \sum_{j=1}^n x_j(t) N_j, \quad N_j \in R^{n \times m}$$

$\alpha(t) \in R^n, \mathcal{Y}(t) \in R$  是连续的漂移参数。

定义一个与问题(1) 等价的扩展优化控制问题

$$\begin{aligned} \min & \left\{ \frac{1}{2} x^T(t_f) \Phi x(t_f) + 2\mathcal{Y}(t_f) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [u^T(t) R u(t) + x^T(t) Q x(t) + 2\mathcal{Y}(t) + \right. \\ & \left. r_1 u(t) - v(t) \right]^2 + r_2 x(t) - z(t) \left. \right]^2 dt \Big\} \\ \text{s. t. } & \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + \{x(t) N\} + \alpha(t) \\ f^*(z(t), v(t), t) = \\ A z(t) + B v(t) + \{z(t) N\} + \alpha(t) \\ L^*(z(t), v(t), t) = \\ \frac{1}{2} (v^T(t) R v(t) + z^T(t) Q z(t) + 2\mathcal{Y}(t)) \\ u(t) = v(t), \quad x(t) = z(t), \quad x(t_0) = x_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $r_1$  和  $r_2$  的比例项是惩罚项,  $z(t), v(t)$  的引入分离了模型优化问题和参数估计问题。

对式(3) 应用极大值原理可得如下最优性必要条件

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + \{x(t) N\} u(t) + \alpha(t) \\ u(t) = -\bar{R}^{-1} [(B + \{x(t) N\})^T p(t) - \lambda(t) - r_1 v(t)] \\ \dot{p}(t) = -\bar{Q} x(t) - A^T p(t) - \\ \frac{\partial p(t)^T \{x N\} u^T}{\partial \alpha(t)} + \beta(t) + r_2 z(t) \\ x(t_0) = x_0, \quad p(t) = \Phi x(t_f) \end{cases} \quad (4)$$

$$\alpha(t) = f^*(z(t), v(t), t) - A z(t) - B v(t) - \{z(t) N\} v(t) \quad (5)$$

$$\begin{cases} \beta(t) = \left[ A + \frac{\partial \{z(t) N\} v(t)}{\partial \alpha(t)} - \frac{\partial \mathcal{Y}^*}{\partial \alpha(t)} \right]^T x \\ \quad \tilde{p}(t) + (Q z(t) - \partial L^* / \partial \alpha(t)) \\ \lambda(t) = \left[ B + \{z(t) N\} - \frac{\partial \mathcal{Y}^*}{\partial \alpha(t)} \right]^T \tilde{p}(t) + \\ \quad (R v(t) - \partial L^* / \partial v(t)) \\ z(t) = x(t), \quad v(t) = u(t), \quad \tilde{p}(t) = p(t) \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $\bar{Q} = Q + r_2 I_n, \bar{R} = R + r_1 I_m; p(t) \in R^n$  是协状态向量,  $\lambda(t) \in R^m, \beta(t) \in R^n$  是修正乘子;  $\tilde{p}(t)$  的引入是为了分离模型优化问题和修正乘子的计算问题。在  $\alpha(t), \mathcal{Y}(t), \lambda(t), \beta(t), z(t)$  和  $v(t)$  给定的情况下, 如下修正的基于模型优化问题(MMOP) 的解恰好满足条件(4)。

$$\begin{aligned} \min_{u(t)} & \left\{ \frac{1}{2} x^T(t_f) \Phi x(t_f) + 2\mathcal{Y}(t_f) + \right. \\ & \left. \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} [u^T(t) R u(t) + x^T(t) Q x(t) + 2\mathcal{Y}(t) + \right. \\ & \left. r_1 u(t) - v(t) \right]^2 + r_2 x(t) - z(t) \left. \right]^2 - \\ & 2\lambda^T(t) u(t) - 2\beta^T(t) x(t) \Big\} dt \\ \text{s. t. } & \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + \{x(t) N\} u(t) + \\ & \alpha(t), \quad x(t_0) = x^0 \end{aligned} \quad (7)$$

由以上推导, 得到基于双线性模型的 DISOPE 算法如下:

假设  $A, B, \Phi, Q, R$  是常数矩阵, 且  $\Phi, Q, R$  满足线性二次型问题的条件,  $L^*, f^*$  具有连续偏导数且其偏导数可以计算。

- 1) 计算一个标称解  $u^0(t), x^0(t), p^0(t)$ , 令  $z^0(t) = x^0(t), v^0(t) = u^0(t), \tilde{p}^0(t) = p^0(t)$ , 置  $i = 0$ ;
- 2) 利用式(5) 计算参数  $\alpha^i(t)$ ;
- 3) 利用式(6) 计算修正乘子  $\lambda^i(t), \beta^i(t)$ ;
- 4) 在给定  $\alpha^i(t), \mathcal{Y}^i(t), \lambda^i(t), \beta^i(t), t \in [t_0, t_f]$  时, 求解 MMOP(7), 得到模型最优控制、最优状态和最优协状态  $u^{i+1}(t), x^{i+1}(t), p^{i+1}(t)$ ;

- 5) 采用如下松弛技术更新  $v^i(t), z^i(t), \tilde{p}^i(t)$ 

$$\begin{cases} v^{i+1}(t) = v^i(t) + k_v (u^{i+1}(t) - v^i(t)) \\ z^{i+1}(t) = z^i(t) + k_z (x^{i+1}(t) - z^i(t)) \\ \tilde{p}^{i+1}(t) = \tilde{p}^i(t) + k_p (p^{i+1}(t) - \tilde{p}^i(t)) \end{cases} \quad (8)$$

其中  $k_v, k_p, k_z \in (0, 1]$ 。如果  $v^{i+1}(t) - v^i(t) \leq \text{eps}$  (eps 是控制误差界限), 则停止迭代, 得到最优解; 否则令  $i = i + 1$ , 转 2)。

注1 初始解可以通过令  $\alpha(t), \mathcal{Y}(t)$  全为零, 然后利用文献[4] 的算法求解 MMOP(2) 而得到。

定理1 假设原问题(1) 的最优解存在且唯一, 若上述算法收敛, 则其收敛解必是问题(1) 的最优

解。

由算法收敛解满足的条件和问题(1) 的最优性必要条件及(1) 的解存在唯一性, 易证本结论。

### 3 非齐次双线性模型二次型问题的迭代算法

首先引入如下记号

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ij} &= A_{ij} - \frac{1}{2}[(B\bar{R}^{-1}N_j^T + N_j\bar{R}^{-1}B^T)p(t)]_i + \\ &\quad [N_j\bar{R}^{-1}(\lambda(t) + rv(t))]_i \\ \tilde{B}R^{-1}B &= (B + \{xN\})\bar{R}^{-1}(B + \{xN\}^T - \\ &\quad \frac{1}{2}(\{xN\}\bar{R}^{-1}B^T + B\bar{R}^{-1}\{xN\}^T) \\ \tilde{Q}_{ij} &= \bar{Q}_{ij} + \frac{1}{2}p^T(t)(Ni\bar{R}^{-1}N_j^T + \\ &\quad N_j\bar{R}^{-1}N_i^T)p(t) \\ h(t) &= \tilde{B}R^{-1}(\lambda(t) + rv(t)) + \alpha(t) \end{aligned} \quad (9)$$

MMOP(7) 的解可表示为如下非齐次非线性两点边值(TBPB) 问题

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \tilde{A}x(t) - \tilde{B}R^{-1}B^T p(t) + h(t) \\ \dot{p}(t) &= -\tilde{Q}x(t) - \tilde{A}^T p(t) + \beta(t) + rzz(t) \end{aligned} \quad (10)$$

记

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(k)} &= \tilde{A}(p^{(k)}(t)), \quad \tilde{Q}^{(k)} = \tilde{Q}(p^{(k)}(t)) \\ \tilde{B}^{(k)}\bar{R}^{-1}\tilde{B}^{(k)T} &= \tilde{B}(x^{(k)}(t))\bar{R}^{-1}\tilde{B}(x^{(k)}(t))^T \end{aligned}$$

令

$$p^{(k+1)}(t) = K^{(k+1)}(t)x^{(k+1)}(t) + g^{(k+1)}(t)$$

构造求解(10) 的分离形式的迭代算法如下

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \tilde{A}^{(k)}x^{(k+1)} - \tilde{B}^{(k)}R^{-1}\tilde{B}^{(k)T}K^{(k+1)} \times \\ &\quad (x^{(k+1)} + g^{(k+1)}) + h(t) \\ K^{(k+1)} &= -K^{(k+1)}\tilde{A}^{(k)} - \tilde{A}^{(k)T}K^{(k+1)} - \tilde{Q}^{(k+1)} + \\ &\quad K^{(k+1)}\tilde{B}^{(k)}\bar{R}^{-1}\tilde{B}^{(k)T}K^{(k+1)} \\ g^{(k+1)} &= -\tilde{A}^{(k)T}g^{(k+1)} + K^{(k+1)}\tilde{B}^{(k)}\bar{R}^{-1}\tilde{B}^{(k)T}g^{(k+1)} + \\ &\quad \beta(t) + rzz(t) + K^{(k+1)}h(t) \\ x^{(k+1)}(t_0) &= x_0, \quad K^{(k+1)}(t_f) = \Phi \\ g^{(k+1)}(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

注 2 当  $k = 0$  时, 令  $\tilde{A}^{(0)} = A, \tilde{Q}^{(0)} = Q, \tilde{B}^{(0)}R^{-1}\tilde{B}^{(0)T} = BR^{-1}B^T$ , 求解式(11) 得到该迭代算法的初始解。

定义 1 设  $B_1$  和  $B_2$  分别是  $n$  维光滑向量函数和  $n \times n$  维光滑矩阵函数所构成的 Banach 空间, 定义以下 3 个算子

$$\begin{aligned} T_1: B_1 \times B_2 \times B_1 &\times B_2 \\ [x, K, g] &T_1(x, K, g) \\ T_2: B_1 \times B_2 \times B_1 &\times B_2 \\ [x, K, g] &T_2(x, K, g) \\ T_3: B_1 \times B_2 \times B_1 &\times B_1 \\ [x, K, g] &T_3(x, K, g) \end{aligned}$$

定义 2 称集合  $D_1 \subseteq B_1, D_2 \subseteq B_2, D_3 \subseteq B_1$  为算子  $T_1, T_2, T_3$  上的不变子集, 如果  $T_1(D_1, D_2, D_3) \subseteq D_1, T_2(D_1, D_2, D_3) \subseteq D_2, T_3(D_2, D_3) \subseteq D_3$ 。算子  $T_1, T_2, T_3$  在  $D_1 \times D_2 \times D_3$  上称为压缩的。如果存在  $3 \times 3$  矩阵  $M > 0$ , 其所有特征值均在单位圆内, 对任意的  $x, \bar{x} \in D_1, K, \bar{K} \in D_2, g, \bar{g} \in D_3$ , 使得下列不等式成立。

$$M \begin{bmatrix} T_1(\hat{x}, \hat{K}, \hat{g}) - T_1(\bar{x}, \bar{K}, \bar{g}) \\ T_2(\hat{x}, \hat{K}, \hat{g}) - T_2(\bar{x}, \bar{K}, \bar{g}) \\ T_3(\hat{x}, \hat{K}, \hat{g}) - T_3(\bar{x}, \bar{K}, \bar{g}) \\ \hat{x} - \bar{x} \\ \hat{K} - \bar{K} \\ \hat{g} - \bar{g} \end{bmatrix} \quad (12)$$

定理 2 假设一组算子  $T_1, T_2, T_3$  存在不变子集  $D_1, D_2, D_3$ , 且在  $D_1 \times D_2 \times D_3$  上是压缩的, 则迭代算法(11) 是收敛的, 且  $x^{(k)}, K^{(k)}, g^{(k)}$  收敛到唯一不动点, 即

$$\begin{aligned} \lim_k x^{(k)} - x^* &= 0 \\ \lim_k K^{(k)} - K^* &= 0 \\ \lim_k g^{(k)} - g^* &= 0 \end{aligned}$$

证明略。

定理 3 由迭代算法(11) 所确定的算子对  $T_1 \times T_2 \times T_3$  存在不变子集  $D_1, D_2, D_3$ , 且在  $D_1 \times D_2 \times D_3$  上是压缩的, 则迭代算法(11) 是收敛的。

利用文献[4] 的方法可证明本结果, 详细过程见文献[5]。

### 4 仿真结果与比较

例 1 考虑如下连续非线性最优控制问题

$$\begin{aligned} \min_{u(t)} \{ &\frac{1}{2}x(t)^T \Phi x(t) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + \\ &u^T(t)Ru(t)] dt \} \\ \text{s. t. } \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t)x_2(t) + x_1(t)x_2(t) \\ u_2(t) + x_1^2(t) + x_2^2(t) \end{bmatrix} \\ x(0) &= [0.1 \quad 0.5]^T \end{aligned}$$

基于模型的优化问题选为

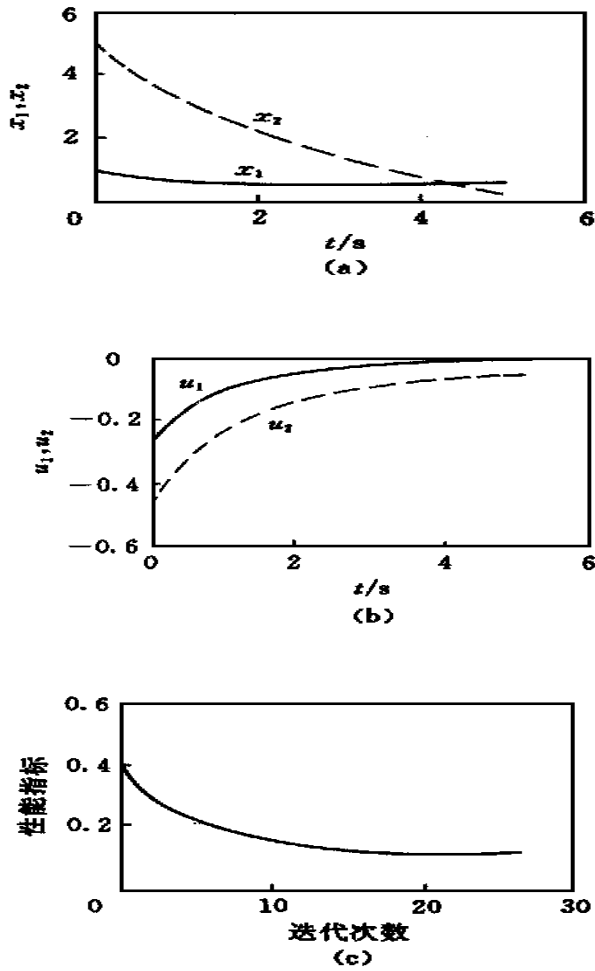


图1 系统仿真结果

(a) 最优状态曲线 (b) 最优控制曲线

(c) 性能指标曲线

$$\int_0^{t_f} u^T(t) R u(t) dt \}$$

$$\text{s. t. } \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) x_2(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \alpha(t)$$

$$x(0) = [0.1 \quad 0.5]^T$$

其中,  $t_f = 5.0$ ,  $Q = I_2$ ,  $R = I_2$ ,  $\Phi = 2I_2$ 。

算法收敛误差  $\text{eps} = 10^{-4}$ , 本文算法迭代 28 次收敛。系统最优状态、最优控制和性能指标变化曲线如图 1 所示。而用文献[1] 的基于线性模型的 DISOPE 算法求解, 算法发散。

## 参考文献

- 1 Roberts P D. An algorithm for optimal control of nonlinear systems with model-reality differences. Proc of IFAC World Congress, 1993, 8: 407~412
- 2 Beccera V M, Roberts P D. Dynamic integrated system optimization and parameter estimation for discrete-time optimal control of nonlinear systems. Int J of Control, 1996, 63(2): 257~281
- 3 李俊民, 万百五, 黄正良. 基于双线性模型非线性动态系统优化与参数估计集成算法. 控制与决策, 1998, 13(5): 521~526
- 4 Hofer E P, Tibken B. An iterative method for the finite-time bilinear quadratic control problem. J of optim theory and applic, 1988, 57(3): 411~428
- 5 李俊民. 非线性动态系统优化与参数估计集成算法研究. 西安: 西安交通大学博士学位论文, 1998

## 作者简介

李俊民 男, 1965 年生。西安电子科技大学副教授, 博士。研究方向为非线性动态系统优化控制, 自适应控制和智能控制。

邢科义 男, 1957 年生。西安交通大学教授, 博士。现在美国 Wayne 大学作访问学者。研究方向为 DEDS 的调度与控制, Petri 理论与应用。

万百五 男, 1928 年生。西安交通大学教授, 博士生导师。研究方向为大系统智能控制等。