离散区间系统的 H_∞ 鲁棒控制*

吴方向 史忠科
(西北工业大学自动控制系 西安 710072)

摘 要 研究离散区间系统的鲁棒稳定性分析和鲁棒控制问题。首先基于 Riccati 方程方法讨论系统的鲁棒稳定性，得到了检验该类系统鲁棒稳定的新的充分条件；然后给出了离散区间系统鲁棒控制器存在的充分条件，并通过求解修正的代数 Riccati 方程，给出了该控制器的设计方法。

关键词 离散区间系统，Riccati 方程，鲁棒稳定性，鲁棒控制
分类号 O 175.21

H_∞ Robust Control for Discrete Interval Systems

Wu Fangxiang, Shi Zhongke
(Northwestern Polytechnical University)

Abstract A new sufficient condition of robust stability for discrete interval systems by using Riccati equation approach is discussed. The robust controller for discrete interval systems is designed. Solving algebraic Riccati inequality, the design of the controller is presented to assure that the closed-loop system is asymptotically stable while H_∞ norm for the closed-loop system is less than certain given value.

Key words discrete interval system, Riccati equation, robust stability, robust control

1 引 言

近年来，鲁棒控制已成为控制理论最活跃的研究领域之一。特别是利用 H_∞ 理论对含参数不确定性系统的鲁棒控制，取得了许多良好的效果[1,2]。在实际工程中，区间系统是一类重要的含参数不确定性的系统。在过去的几十年内，对区间系统的研究绝大部分仅限于鲁棒稳定性分析[3~5]，对镇定和干扰抑制问题却鲜见报道。

文献[6] 研究了连续区间系统的鲁棒控制问题。本文将研究离散区间控制系统鲁棒控制问题，主要目的是设计线性状态反馈控制器，以确保闭环系统内部渐近稳定，同时将干扰抑制到一定水平。

2 问题描述

考虑如下差分方程描述的线性动态系统

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_1 w(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \tag{1}$$

其中，$x \in R^n$ 为状态向量，$u \in R^m$ 为控制向量，$y \in R^q$ 为评价信号，$w \in R^p$ 为平方可积(即能量有限) 的干扰信号，B, B_1, C, D 为适当维数的常数矩阵，A 为状态矩阵。其元素属于某些确定的区间，即

$$A \in N[P, Q] = \{A \in R^{n\times n} \mid p_{ij} \le a_{ij} \le q_{ij}, i, j = 1, \cdots, n\}$$

系统(1) 称为离散的区间系统。由文献[6]，离散的区间系统(1) 可等价描述为

$$x(k+1) = A_0 x(k) + E\Sigma F x(k) + B_1 w(k) + Bu(k), \quad \forall \Sigma \in \Sigma^* \tag{2}$$

式中有关符号与文献[6] 中的意义相同。

本文研究的问题是：如何设计线性状态反馈控制器

$$u(k) = Kx(k) \tag{3}$$

* 国家重点基础研究发展规划项目(G1998030417) 和西北工业大学“双新”计划项目
1999-08-31 收稿，1999-11-24 修回

使得区间控制系统(1)满足如下性能指标:

1) 当 $w=0$ 时,对 $\forall A\in[P,Q]$,闭环系统内部稳定,即 $A+BK$ 是渐近稳定的;

2) 对于 $\forall A\in[P,Q]$,闭环系统满足

$$\|T_{z\omega}(z)\|_\infty\le\gamma,\quad z=e^{i\theta},0\le\theta\le2\pi \tag{4}$$

其中,$T_{z\omega}(z)=(C+DK)(zI-A-BK)^{-1}B_1$ 为闭环系统的干扰到评价信号的传递函数;$\gamma>0$ 为给定常数,表示系统抑制干扰的水平。

3　鲁棒控制

首先讨论离散区间系统的鲁棒稳定性。考虑如下自由的离散区间系统

$$x(k+1)=Ax(k)=(A_0+E\Sigma F)x(k),\quad\forall\Sigma\in\Sigma^* \tag{5}$$

其中状态矩阵 A 为系统(1)描述的区间矩阵。为了分析系统(5)的稳定性,需要下列引理:

引理1[1]　如果存在标量 $\epsilon>0$,适当维数的对称矩阵 S 和对称正定矩阵 X,并且 $X^{-1}>S+\epsilon^2EE^T$,则对 $\forall\Sigma\in\Sigma^*$,有

$$(A_0+E\Sigma F)^T(X^{-1}-S)^{-1}(A_0+E\Sigma F)\le\epsilon^{-2}F^TF+A_0^T(X^{-1}-S-\epsilon^2EE^T)^{-1}A_0 \tag{6}$$

定理1　如果存在标量 $\epsilon>0$ 和对称正定矩阵 X,使得下式

$$A_0^T(X^{-1}-\epsilon^2EE^T)^{-1}A_0+\epsilon^{-2}F^TF-X<0$$
$$X^{-1}>\epsilon^2EE^T \tag{7}$$

成立,则离散区间系统(5)是渐近稳定的。

证明　设标量 $\epsilon>0$ 和对称正定矩阵 X 满足式(7),由引理1有

$$A^TXA-X=(A_0+E\Sigma F)^TX(A_0+E\Sigma F)-X\le A_0^T(X^{-1}-\epsilon^2EE^T)^{-1}A_0+\epsilon^{-2}F^TF-X<0$$

因此,根据Lyapunov稳定性定理,系统(5)是渐近稳定的。(证毕)

下面给出本文的主要结果。将式(3)代入式(1)可得闭环系统

$$\begin{cases}x(k+1)=(A_0+E\Sigma F+BK)x(k)+B_1w(k)\\ y(k)=(C+DK)x(k)\end{cases} \tag{8}$$

为了推导简单起见,假设 $D^T[C\quad D]=[0\quad I]$。令 $A_{0K}=A_0+BK,A_K=A_{0K}+E\Sigma F,C_K=C+DK$。

定理2　对于给定的 $\gamma>0$,假设存在标量 $\epsilon>0$,适当维数的矩阵 K 和对称正定矩阵 X,使得下式

$$A_{0K}^T(X^{-1}-\epsilon^2EE^T-\gamma^{-2}B_1B_1^T)^{-1}A_{0K}+C_K^T+C_K\epsilon^{-2}F^TF-X<0 \tag{9}$$
$$X^{-1}>\epsilon^2EE^T+\gamma^{-2}B_1B_1^T \tag{10}$$

成立,则闭环系统(1)和(3)满足性能指标1)和2)。

证明　由引理1,经过矩阵运算,则有

$$A_K^TXA_K+A_K^TXB_1(\gamma^2I-B_1^TXB_1)^{-1}\times B_1^TXA_K+C_K^TC_K-X=A_K^T(X^{-1}-\gamma^{-2}B_1B_1^T)^{-1}A_K+C_K^TC_K-X\le A_{0K}^T(X^{-1}-\epsilon^{-2}EE^T-\gamma^{-2}B_1B_1^T)^{-1}A_{0K}+\epsilon^{-2}F^TF+C_K^TC_K-X \tag{11}$$

由式(9)得

$$A_K^TXA_K+A_K^TXB_1(\gamma^2I-B_1^TXB_1)^{-1}\times B_1^TXA_K+C_K^TC_K-X<0 \tag{12}$$

由Lyapunov稳定性理论和式(12)知,对 $\forall A\in[P,Q]$,$A+BK$ 是渐近稳定的,即闭环系统内部稳定,所以闭环系统满足性能指标1)。

为了证明闭环系统满足性能指标2),将式(12)改写成

$$-(zI-A_K)^*X(zI-A_K)-(zI-A_K)^*XA_K-A_K^TX(zI-A_K)\times A_K^TXB_1(\gamma^2I-B_1^TXB_1)^{-1}B_1^TXA_K+C_K^TC_K<0$$

其中,上标“*”表示矩阵的共轭转置,$z=e^{i\theta},0\le\theta<2\pi$。上式左乘以 $B_1^T[(zI-A_K)^*]^{-1}$,右乘以 $(zI-A_K)^{-1}B_1$,并令 $Y(z)=B_1^TXA_K(zI-A_K)^{-1}B_1$,经整理可得

$$-B_1^TXB_1-Y(z)-Y^*(z)+Y^*(z)(\gamma^2I-B_1^TXB_1)^{-1}Y(z)+T^*(z)T(z)\le0$$

进一步有

$$T^*(z)T(z)\le B_1^TXB_1+Y(z)+Y^*(z)-Y^*(z)(\gamma^2I-B_1^TXB_1)^{-1}Y(z)=\gamma^2I-(\gamma^2I-B_1^TXB_1)+Y(z)+Y^*(z)-Y^*(z)(\gamma^2I-B_1^TXB_1)^{-1}Y(z)=\gamma^2I-(I-Y(z))^*(\gamma^2I-B_1^TXB_1)^{-1}\times(I-Y(z))\le\gamma^2I$$

由离散系统 H_∞ 范数的定义,式(4)成立,因此闭环系统满足性能指标2)。(证毕)

不等式(9)中 K 和 X 均为未知矩阵,不易求解。为此在定理2的基础上,用如下定理由一个只含 X 的矩阵不等式来构造矩阵 K。

定理3　对于给定的 $\gamma>0$,假设存在标量 $\epsilon>0$ 和对称正定矩阵 X,使得式(10)及下式

$$A_0^T(X^{-1}-\epsilon^2EE^T-\gamma^{-2}B_1B_1^T+BB^T)^{-1}A_0+C^TC+\epsilon^{-2}F^TF-X<0 \tag{13}$$

成立,则当在状态反馈控制律(3)中取

$$K = -B^{\mathrm{T}}(X^{-1} - \epsilon^{2}EE^{\mathrm{T}} - \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}})^{-1}A_0 \qquad (14)$$

时, 闭环系统(1) 和(3) 满足性能指标 1) 和 2)。

证明　令 $Z = (X^{-1} - \epsilon^{-2}EE^{\mathrm{T}} - \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}})^{-1}$, 则有

$$A_{0K}^{\mathrm{T}}(X^{-1} - \epsilon^{2}EE^{\mathrm{T}} - \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}})^{-1}A_{0K} + C_K^{\mathrm{T}}C_K + \epsilon^{-2}F^{\mathrm{T}}F - X =$$
$$(A_0 + BK)^{\mathrm{T}}Z(A_0 + BK) + C^{\mathrm{T}}C + K^{\mathrm{T}}K + \epsilon^{-2}F^{\mathrm{T}}F - X =$$
$$A_0^{\mathrm{T}}(X^{-1} - \epsilon^{2}EE^{\mathrm{T}} - \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}})^{-1}A_0 + C^{\mathrm{T}}C + \epsilon^{-2}F^{\mathrm{T}}F - X + R$$

其中

$$R = [K + (I + B^{\mathrm{T}}ZB)^{-1}B^{\mathrm{T}}ZA_0]^{\mathrm{T}} \times (I + B^{\mathrm{T}}ZB)[K + (I + B^{\mathrm{T}}ZB)^{-1}B^{\mathrm{T}}ZA_0]$$

因此当

$$K = -(I + B^{\mathrm{T}}ZB)^{-1}B^{\mathrm{T}}ZA_0 = -B^{\mathrm{T}}(X^{-1} - \epsilon^{2}EE^{\mathrm{T}} - \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}})^{-1}A_0$$

时, 不等式(13) 和(9) 是等价的, 由定理 2 知本定理成立。

为了得到控制器增益(14), 需要解矩阵不等式(13), 并检验矩阵不等式(10)。矩阵不等式(9) 实际上是一个修正的离散代数 Riccati 方程, 关于它的解法, 可以参考文献[7] 给出的算法。

4　结　　论

本文研究离散区间系统的鲁棒稳定性和鲁棒控制问题, 给出了由修正的离散代数 Riccati 不等式表示的鲁棒稳定性的充分条件, 进一步导出了由修正的离散代数 Riccati 不等式表示的鲁棒控制器存在的充分条件。通过求解该方程可得到一个状态反馈控制律, 不仅使离散的区间闭环系统内部稳定, 而且将干扰抑制到一定水平。

参 考 文 献

1　Khargonekar P P, Petersenn I R, Zhou K. Robust stabilization of linear system: Quadratic stabilizability and H_∞ control theory. IEEE Trans on Autom Contr, 1990, 35(2): 356～361

2　Xie L, Souza C E. Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. IEEE Trans on Autom Contr, 1992, 37(8): 1188～1191

3　Balas S. A necessary and sufficient condition for stability of interval matrices. Int J Control, 1983, 37(3): 717～722

4　K Wangm, A N Michel, D Liu. Necessary and sufficient conditions for the Hurwitz and Schur stability of interval matrices. IEEE Trans on Autom Contr, 1994, 39(9): 1251～1255

5　毛维杰, 孙优贤. 区间矩阵的鲁棒稳定性判据. 控制与决策, 1997, 12(3): 264～268

6　吴方向, 史忠科, 戴冠中. 区间系统的 H_∞ 鲁棒控制. 自动化学报, 1999, 25(5): 703～708

7　R A Paz, J V Medanic. H_∞ Control in discrete-time state feedback control and norm bounds. Int J Contr, 1992, 55(6): 1405～1424

作 者 简 介

吴方向　男, 1966 年生。1998 年获西北工业大学自动控制理论及应用专业博士学位, 现为该校自动控制系副教授。研究方向为鲁棒控制, 非线性控制和交通控制等。

史忠科　男, 1956 年生。西北工业大学自动控制系教授, 博士生导师。研究方向为估计与辨识方法, 鲁棒控制, 智能控制, 交通控制等。