第 15 卷 第 4 期
Vol. 15 No. 4
控 制 与 决 策
CONTROL AND DECISION
2000 年 7 月
July 2000

离散线性系统鲁棒非奇异自适应控制的改进*

赵晓晖
(长春邮电学院信息科学研究中心 130012)
王书强
(吉林工业大学信息科学与工程学院)

摘 要 为解决间接自适应控制系统的奇异性或不可控性问题,提出一种新的修正模型辨识参数方法,参数修正策略使系统辨识模型在适应过程中保持能控性。该修正算法同文献[1]给出的算法相比计算量大为减少,进一步提高了控制算法的实时性。

关键词 自适应控制,非奇异性,鲁棒性,全局渐近稳定性
分类号 TP 237.2

Improvement of Robust Non-singular Adaptive Control of Linear Discrete Systems

Zhao Xiaohui
(Changchun Institute of Posts and Telecommunications)
Wang Shuqiang
(Jilin University of Technology)

Abstract In order to solve singularity problems or problems of lossing controllability in the indirect adaptive control systems, a novel modified parameter estimation procedure is proposed. The method can guarantee system controllability for estimated models and it is much less complicated than that given in reference [1] in calculation. It improves the implementation possibility in real time control.

Key words adaptive control, non-singularity, robustness, globally asymptotical stability

1 引 言

在自适应控制系统的分析与综合过程中,采用极点配置自适应控制器时,由于存在未建模动态误差、恒定有界扰动和参数辨识算法不满足持续激励条件,系统可能出现奇异性问题。这是间接自适应控制理论中的一个重要研究课题。文献[1]针对离散时间系统提出一种非奇异自适应控制算法,即在保持原来辨识参数收敛的前提下,将其在线修正来防止估计模型奇异性的产生。但是该方法计算量大,缺乏自适应控制系统所要求的实时性。

本文在文献[1]提出的修正策略的基础上,给出一种简化的修正方法,使计算量大为减少,进一步提高了控制算法的实时性。

2 未知参数系统的参数辨识算法

考虑单输入单输出线性离散时不变系统

$$A(q^{-1})y_t = B(q^{-1})u_t + v_t, \quad t \in Z^t \tag{2.1}$$

式中

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_n q^{-n}$$
$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_n q^{-n}$$

u_t 和 y_t 分别是系统的输入和输出,v_t 是外界扰动和未建模动态误差的总和。式(1)还可写成如下形式

$$y_t = \theta^{*T}\varphi_{t-1} + v_t \tag{2.2}$$

其中

$$\varphi_{t-1}^T = [u_{t-1}, \cdots, u_{t-n}, -y_{t-1}, \cdots, -y_{t-n}]$$
$$\theta^{*T} = [b_1^*, \cdots, b_n^*, a_1^*, \cdots, a_n^*]$$

扰动满足不等式 $|v_t| \le \eta + \mu\|\varphi_{t-1}\|_2$,其中,$\eta > 0$ 和 $\mu > 0$ 为已知正实常数,η 为恒定外界扰动,$\mu\|\varphi_{t-1}\|_2$ 表示未建模动态误差。

本文对系统(2.1)做如下假设:

1) $A(q^{-1})$ 和 $B(q^{-1})$ 互质且阶次 n 已知;

2) 扰动上界 η 和 μ 均为已知。

为估计未知参数 θ^*,对式(2.2)进行正则化处理,有

* 国家自然科学基金项目(69574005)
1999-10-15 收稿,1999-12-24 修回

$$\varphi_{t-1}=\frac{\varphi_{t-1}}{1+\|\varphi_{t-1}\|_2},\quad \bar{y}_t=\frac{y_t}{1+\|\varphi_{t-1}\|_2}$$

$$\bar{v}_t=\frac{v_t}{1+\|\varphi_{t-1}\|_2}$$

于是带有死区的最小二乘递推参数估计算法可表示为

$$\theta_t=\theta_{t-1}+\lambda_t F_t\varphi_{t-1}e_t,\quad \tilde{\theta}_t=\theta_t-\theta^* \tag{2.3}$$

$$F_t=F_{t-1}-\frac{\lambda_t F_{t-1}\varphi_{t-1}\varphi_{t-1}^{\mathrm{T}}F_{t-1}}{1+\lambda_t\varphi_{t-1}^{\mathrm{T}}F_{t-1}\varphi_{t-1}} \tag{2.4}$$

式(2.3)中辨识参数的估计预报误差为 $e_t=\bar{y}_t-\varphi_{t-1}^{\mathrm{T}}\theta_{t-1}$，其中 $\theta=[b_0,\cdots,b_n,a_1,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$ 是未知参数 θ^* 的估计值。死区切换函数定义为

$$\lambda_t=\begin{cases}1, & e_{st}^2\geq\dfrac{\alpha_t\delta_t^2}{1-\alpha_t}\\[2mm] 0, & e_{st}^2<\dfrac{\alpha_t\delta_t^2}{1-\alpha_t}\end{cases} \tag{2.5}$$

式中增广误差 e_{st} 及其上界 δ_t 分别定义为

$$e_{st}^2=e_t^2+\varphi_{t-1}^{\mathrm{T}}F_{t-1}^2\varphi_{t-1}$$

$$|\bar{v}_t|\leq\delta_t=\mu+\frac{\eta}{1+\|\varphi_{t-1}\|_2}$$

上述估计算法的主要收敛特性由如下引理给出。

引理 1 由式(2.3)～(2.5)给出的最小二乘参数递推辨识算法具有如下收敛性质:

1) F_t 和 θ_t 均有界收敛;

2) 当 $\lambda_t=1$ 时 $\sum_{i=1}^{t}(\lambda_i e_{si})^2<\infty$，当 $\lambda_t=0$ 时 e_{st} 有界。

证明详见文献[2]。

3 主要结果

在文献[1]的基础上，本文给出一种较前者大为简化的新修正方法。根据文献[1]，$\bar{\theta}_t=\theta_t+F_t\beta_t$，式中 $\bar{\theta}=[\bar{b}_0,\cdots,\bar{b}_n,\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n]^{\mathrm{T}}$，辨识参数的修正可由适当选择 β_t 来进行。考虑求解控制器参数等价于求解 Diophantine 方程

$$\bar{A}(q^{-1})S(q^{-1})+\bar{B}(q^{-1})R(q^{-1})=C(q^{-1})$$

其中 $q^{2n-1}C(q^{-1})$ 是一选定的 Hurwitz 多项式，其零点为系统期望的闭环极点。控制器多项式分别为

$$S(q^{-1})=1+s_1q^{-1}+\cdots+s_{n-1}q^{-n+1}$$

$$R(q^{-1})=r_0+r_1q^{-1}+\cdots+r_{n-1}q^{-n+1}$$

只要 $2n\times 2n$ 的 Sylvester 矩阵 $M(\bar{\theta}_t)$ 在自适应控制过程中始终有解，便可求出控制器参数[1]。

令 D 为具有内部封闭性的 d 维向量空间 $\mathscr{R}^d$ 上任意紧子集，D 取单位立方体

$$\{X=(x_1,x_2,\cdots,x_d)\in\mathscr{R}^d,\ 0\leq x_i\leq 1,0\leq i\leq d\} \tag{3.1}$$

$\{X_t\}$ 是在 D 上一致分布 d 维向量序列。为保证 $M(\bar{\theta}_t)$ 非奇异，β_t 值在 D 中向量空间内切换。为满足条件 β_t 收敛，引入一与滞环常数 γ 有关的切换函数。定义

$$Z_t(\lambda)=\left|\det M(\theta_t+F_tX_t)\right|=\left|\det M(\theta_t+F_t(x_1x_2\cdots x_d)^{\mathrm{T}})\right| \tag{3.2}$$

注意到 $Z_t(\lambda)=|\det M(\bar{\theta}_t)|$，此时 β_t 在式(3.1)中选取。滞环切换函数定义如下

$$X_t=\begin{cases}\eta_t, & Z_t(\eta_t)\geq(1+\gamma)Z_t(X_{t-1})\\ X_{t-1}, & Z_t(\eta_t)<(1+\gamma)Z_t(X_{t-1})\end{cases} \tag{3.3}$$

其中，初始条件为 $X_0=\eta_0$（对所有 $t\geq 1$），η_t 是 $\{X_t\}$ 中任意向量，γ 由 $1\geq 2\gamma+\gamma^2$ 决定[3]。与[1]中使用的近似穷举的确定性矩阵行列式搜索法不同，这里采用基于最优的随机搜索法[3]来选择 X_t，使用该方法的优点是每步只需计算和比较两个矩阵行列式的值。于是可得到本文的主要结果:

定理 1 考虑满足假设条件的系统(2.1)，参数辨识算法(2.3)～(2.5)，参数估计修正策略如上所述，式(3.3)中 X_t 依据基于最优的随机搜索法来选取，则 β_t 收敛，矩阵 $M(\bar{\theta}_t)$ 行列式的绝对值有下界

$$\left|\det M(\bar{\theta}_t)\right|\geq\frac{\epsilon_0\overline{Q}}{l^{1/2}h_1^{(d-1)d}\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{1}{2i-1}\right)^{d(l-1)/2}(1+\gamma)} \tag{3.4}$$

其中，$Q=\left|\det A_1\right|^{d^d}=\left|\det A_1\right|^{l}$，$d=m+n+1$，$l=d^d$，$A_1$ 是一定常矩阵，ϵ_0 是原系统能控性测度，且 $0<\epsilon_0\leq\left|\det M(\theta^*)\right|$，$h_1=\max(1,h_0)$，$h_0=V_0$，$V_0$ 的意义参见文献[2]中定理 1 的证明。

证明 $\det M(\theta_t+F_tX_t)$ 可表示为由 X_t 中元素 $x_1,x_2,\cdots,x_d$ 等组成的多项式

$$\det M(\bar{\theta}_t)=\det M(\theta_t+F_tX_t)=\sum_{i_1,\cdots,i_d=0}^{d-1}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_d^{i_d}g(i_1,i_2,\cdots,i_d)=g_t^{\mathrm{T}}v(X_t) \tag{3.5}$$

其中 $v(X_t^{\mathrm{T}})$ 是 $l=d^d$ 维向量，且

$$v(X_t^{\mathrm{T}})=[1,x_1,\cdots,x_1^{d-1},x_2(1,x_1,\cdots,x_1^{d-1}),\cdots,x_2^{d-1}(1,x_1,\cdots,x_1^{d-1}),\cdots,(1,x_1,x_1^2,\cdots,x_1^{d-1})\times$$

$$(1, x_2, x_2^2, \cdots, x_2^{d-1}) \cdots (1, x_d, x_d^2, \cdots, x_d^{d-1})] \tag{3.6}$$

当 X_t 在集合 D 中取不同值时, 定义一个包括 $\det M(\theta + F_t X_t)$ 所有值的向量 p_t, 则 p_t 具有下列形式

$$p_t = [g_t^T v(X_1), g_t^T v(X_2), \cdots, g_t^T v(X_\infty)] = g_t^T N \tag{3.7}$$

其中 N 可表示为 $N = [v(X_1), v(X_2), \cdots, v(X_\infty)]$ 的 $l \times \infty$ 维矩阵。首先求式(3.7) 中 p_t 的下界

$$\| p_t \|^2 = p_t^T p_t = g_t^T N N^T g_t = \frac{1}{\sigma} g_t^T N N^T \sigma g_t \tag{3.8}$$

其中 NN^T 是 $l \times l$ 维方阵。由于 D 为一单位立方体, 在极限意义下可用块矩阵 A_{d-1} 表示为

$$NN^T\sigma = A_d = \begin{bmatrix} A_{d-1} & A_{d-1}/2 & \cdots & A_{d-1}/d \\ A_{d-1}/2 & A_{d-1}/3 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{d-1}/d & \cdots & & A_{d-1}/2d-1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/d \\ 1/2 & 1/3 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1/d & \cdots & & 1/d \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

由矩阵行列式的性质[4] 可得

$$\det NN^T\sigma \le \lambda_{\min} NN^T\sigma (\mathrm{tr} NN^T\sigma)^{l-1} \tag{3.10}$$

其中 $\lambda_{\min} NN^T\sigma$ 和 $\lambda_{\max} NN^T\sigma$ 分别为矩阵 $NN^T\sigma$ 的最小特征值和最大特征值。由式(3.8) 知

$$\| p_t \|^2 \ge \frac{1}{\sigma} \| g_t \|^2 \lambda_{\min} NN^T\sigma \tag{3.11}$$

综合式(3.10) 和(3.11), 得

$$\| p_t \| \ge \sqrt{\frac{1}{\sigma}} \| g_t \| \sqrt{\frac{\det NN^T\sigma}{(\mathrm{tr} NN^T\sigma)^{l-1}}} \tag{3.12}$$

由于原始系统(2.1) 可控, 用 ϵ_0 表示能控性的测度, 则由下式可求出向量 g_t 的一个下界。

$$0 < \epsilon_0 \le |\det M(\theta^*)| = |g_t^T v(X^*)| \le \| g_t \| \| v(X^*) \| \tag{3.13}$$

由文献[1] 知 $\| X^* \| \le V_0 = h_0$, 综合式(3.8) 可导出

$$\| v(X^*) \| \le l^{1/2} h_1^{d(d-1)}, \quad h_1 = \max(1, h_0) \tag{3.14}$$

将式(3.13) 和(3.14) 代入(3.12), 得

$$\| p_t \| \ge \sqrt{\frac{1}{\sigma}} \frac{\epsilon_0}{l^{1/2} h_1^{d(d-1)}} \frac{\sqrt{\det NN^T\sigma}}{\mathrm{tr}(NN^T)^{(l-1)/2}} \tag{3.15}$$

由矩阵(3.9) 知

$$\mathrm{tr} NN^T\sigma = \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{2i-1} \right)^d \tag{3.16}$$

利用数学归纳法可得出

$$\det NN^T\sigma = \det A_d = (\det A_1)^{d d^{d-1}} = (\det A_1)^{d^d} \tag{3.17}$$

定义 $\det NN^T\sigma = Q$, 将式(3.16) 代入(3.15), 得

$$\| p_t \| \ge \sqrt{\frac{1}{\sigma}} \frac{\epsilon_0 \sqrt{Q}}{l^{1/2} h_1^{d(d-1)} \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{2i-1} \right)^d} \tag{3.18}$$

定义 $Z_{\max}(t) = \max_{X \in D} Z_t(X)$, 由式(3.2), (3.5) 和(3.7) 可得

$$\| p_t \| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (Z_{\max}^i(t))^2} = \frac{1}{\sigma} Z_{\max}(t) \tag{3.19}$$

综合式(3.18) 和(3.19) 得

$$\frac{\epsilon_0 \sqrt{Q}}{l^{1/2} h_1^{d(d-1)} \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{2i-1} \right)^{d(l-1)/2}} \le Z_{\max}(t) \tag{3.20}$$

引入滞环常数 $\gamma > 0$ 以保证 $\{X_t\}$ 收敛, 从而使得 θ_t 收敛。由于在切换函数(3.3) 中引入滞环常数, X_t 未必使得 $Z_t(X_t) = Z_{\max}(t)$, 所以有

$$Z_t(X_t) > \frac{Z_{\max}(t)}{1+\gamma} \tag{3.21}$$

结合式(3.20) 和(3.21) 即可完成定理的证明。

4　极点配置算法及闭环系统的稳定性分析

上节通过修正被估参数解决了自适应控制中的奇异性问题。本节基于上节的结果给出一种使闭环系统全局收敛和稳定的自适应极点配置算法。利用修正辨识参数构成的估计模型表达式为

$$\bar{A}(q^{-1}) y_t = \bar{B}(q^{-1}) u_t + e_{mt}(t) \tag{4.1}$$

式中 $e_{mt}(t)$ 是修正参数估计的后验辨识误差。间接自适应极点配置控制算法可表述如下

$$S(q^{-1}) u_t = C(q^{-1}) y_t^* - R(q^{-1}) y_t \tag{4.2}$$

式中, y_t^* 是参考信号, $S(q^{-1})$, $R(q^{-1})$ 和 $C(q^{-1})$ 的定义见文献[1]。式(4.1) 中 e_{mt} 是修正后模型估计误差, 它经正则化后, $\bar{e}_{mt}$ 的收敛性质同 e_{st}[2]。综合式(4.1) 和(4.2) 可得出闭环系统状态空间表达式

$$x_t = A_t x_{t-1} + b_e e_{mt} + b_d r_{dt} \tag{4.3}$$

式中，A_t 是一时变 $2n\times 2n$ 矩阵，A_t 的表达式见文献[1]，$C(q^{-1})y_t^* = r_{dt}$，$x_{t-1} = [y_{t-1},\cdots,y_{t-n},w_{-1},\cdots,w_{t-n}]^T$，$b_c = [1,0,\cdots,0]^T$，$b_d = [0,\cdots,0,1,0,\cdots,0]^T$。

由于 θ_t 收敛，于是由 A_t 矩阵可得 $A_t = A_c + A_{vt}$，$A_{vt}\to 0$，其中 A_c 是一定常矩阵，而 $A_{vt}\to 0$。如果多项式 $\bar{A}(q^{-1})$ 和 $\bar{B}(q^{-1})$ 的系数为恒定常数，则由控制算法(4.2)知，系统的闭环极点就是选定多项式 $C(q^{-1})$ 的零点。这说明尽管 A_t 矩阵是时变的，但在任意时刻 t，其特征值和 $C(q^{-1})$ 的零点等价。通过此结论可知 A_t 将收敛到一定常指数稳定矩阵 A_c，将 t_0 定为时间原点。求解式(4.3)可得

$$x_t = A_c^{t-1}x_0 + \sum_{k=1}^{t}A_c^{t-k}(A_{vk}x_k + b_c e_{mk} + b_d r_{dk}) \tag{4.4}$$

按[2]中闭环系统稳定性分析的方法和定理 2 的证明可得下述结论：

定理 2 考虑具有有界恒定扰动和未建模动态的离散线性时间系统(2.1)，在假设 1) 和假设 2) 下，存在一阈值 $\bar{\mu}>0$，当 $\mu\le\bar{\mu}$ 时，闭环系统(4.4)全局渐近稳定。系统中所有信号有界，u_t 和 y_t 有界。

证明略。

5 结 语

为克服自适应控制中的奇异性问题，本文在文献[1]的基础上，对带有界扰动和未建模动态的离散时间系统提出一种新的非奇异间接自适应极点配置算法。该算法从理论上改进了原方法计算量过大的缺点，由原先做系统阶次阶乘数量级的矩阵行列式比较次数下降到两次比较，这有利于将其推广到实际应用领域。该控制方法还可推广应用于多变量离散线性系统的非奇异自适应控制问题。

参 考 文 献

1 Lozano R, Zhao X H. Adaptive pole placement without excitation probing signals. IEEE Trans on Autom Contr, 1994, 39(1): 47～58

2 赵晓晖，冯纯伯. 一种鲁棒模型参考自适应控制. 控制理论与应用，1998, 15(6): 865～871

3 Guo L. Self-convergence of weighted least-squares with applications to stochastic adaptive control. IEEE Trans on Autom Contr, 1996, 41(1): 79～89

4 Lancaster P, Tismenetsky M. The theory of matrices. Second Edition. Academic Press, Inc, 1985

5 Goodwin G C, Sin K S. Adaptive filtering, prediction and control. New Jersey: Prentice Hall, 1984

作 者 简 介

赵晓晖 男，1957 年生。1993 年在法国贡比涅科技大学获博士学位，1994～1996 年在东南大学从事博士后研究，现为长春邮电学院信息科学研究中心主任，教授。从事自适应控制理论、信号处理理论和移动通信理论与技术的研究与开发工作。

王书强 男，1974 年生。1999 年在吉林工业大学获硕士学位，现为深圳华为公司工程师。从事自适应控制技术和通信理论与技术的研究和开发工作。

下 期 要 目