第 15 卷 第 4 期 控 制 与 决 策 2000 年 7 月
Vol. 15 No. 4 CONTROL AND DECISION July 2000

# 一类随机连续信号的时间序列分析与建模*

赵 明 旺
(武汉科技大学自动化系 430081)

**摘 要** 讨论由随机微分方程描述的随机连续信号的辨识建模问题。提出并证明了非平稳的连续 Wiener 过程通过稳定的连续线性系统后为平稳随机过程,且均值和自相关函数阵为时间遍历的。基于状态空间分析,给出了连续随机信号建模的时间序列分析方法,并证明了参数估计的一致收敛性。仿真结果显示了所提出方法的有效性。

**关键词** 随机连续信号,时间序列分析,建模,系统辨识,Wiener 过程
**分类号** O 211.61

# Modeling and Time-series Analysis for a Class of Stochastic Continuous Signals

*Zhao Mingwang*
(Wuhan University of Science and Technology)

**Abstract** The modeling problem for stochastic continuous signals, described by stochastic differential equations, is discussed. It is proved that the stochastic process produced by a non-stationary continuous Wiener process and a stable linear filter is stationary and its expectation and self-correlation function are ergodic. Based on the state-space analysis, the time-series analysis method for identification of the stochastic continuous signals, proved as consistent convergence, is given. Simulation results show the effectiveness of the proposed method.

**Key words** stochastic continuous signal, time-series analysis, modeling, system identification, Wiener process

## 1 引 言

时间序列分析(TSA)是系统工程、控制工程、机械工程、经济和社会系统分析等领域系统建模和分析的强有力工具。随机离散信号的TSA 无论在理论上还是在应用中都取得了丰硕成果,而随机连续信号方面的工作则显得十分有限。由于大多数实际工程、经济和社会系统的信号都是连续的,因此对随机连续信号 TSA 建模的研究具有理论和工程应用的重要意义。

近十年来,在与TSA 建模理论密切相关的系统辨识领域,随机连续系统辨识受到充分重视,取得了一些极有意义的进展。例如:

1) 陈翰馥等人[1,2]提出了包含噪声模型辨识在内的基于连续最小二乘(CLS)辨识算法,并进行了辨识一致收敛性分析;文献[3,4]讨论了该CLS 辨识算法的数值实现问题。此类方法的主要问题是CLS 法(实为一组非线性随机微分方程)的解存在性问题、辨识算法的实现和实用化问题。

2) Gevers 等人[5]通过嵌入滤波器,给出了随机连续系统基于输入输出滤波的随机逼近辨识和自适应控制方法,并证明了参数估计是一致有界的,但未能证明辨识的收敛性和一致性。

3) Sagara 等人[6]基于数值积分将连续系统化为离散模型,利用离散滑动平均模型刻画随机因素和计算误差,采用离散辨识法辨识连续的输入输出模型,但该方法未能得到连续相关扰动模型。

4) 赵明旺[7~9]基于正交逼近将随机连续系统变换为代数方程,利用最小二乘法进行辨识。在指出

* 中国科学院机器人开放实验室开放课题基金项目
1999-06-09 收稿, 1999-09-27 修回

该辨识有偏、非一致收敛后,给出了一致收敛的辅助变量法和 Markov 法两种辨识方法。

本文对连续 Wiener 过程通过稳定的线性系统后构成的随机连续信号进行统计性质分析, 在此基础上研究基于随机连续信号相关分析的直接建模方法。

## 2　问题描述

考虑由随机微分方程描述的如下 SISO 随机连续信号模型

$$y_t + a_1\int_0^t y_s\mathrm{d}s + \cdots + a_n\int_0^t\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{n-1}} y_{s_n}\mathrm{d}s_n\cdots\mathrm{d}s_1 = w_t,\quad t \geq t_0 \tag{2.1}$$

其中, $y_t$ 和 $w_t$ 分别为零初值的输出和随机连续扰动, $t_0$ 为初始时间, 各积分为 Ito 随机积分[1,2]。

设扰动 $w_t$ 可用连续 Wiener 过程描述, 则根据 Wiener 过程和 Ito 随机积分的定义, 有[10]

$$\mathrm{E}\left[\int_0^t f_1(s)\,\mathrm{d}w_s\right] = 0 \tag{2.2}$$

$$\mathrm{E}[w_{t_4} - w_{t_2}][w_{t_3} - w_{t_1}] = (t_3 - t_2)\sigma^2$$
$$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \tag{2.3}$$

$$\mathrm{E}\left[\int_0^{t_1} f_1(s)\,\mathrm{d}w_s\int_0^{t_2} f_2(s)\,\mathrm{d}w_s\right] = \sigma^2\int_0^{t_1} f_1(s)f_2(s)\,\mathrm{d}s,\quad t_0 \leq t_1 \leq t_2 \tag{2.4}$$

其中, 随机积分均为 Ito 积分, $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 为确定性时间 $t$ 的函数, $\sigma^2$ 为 Wiener 过程的方差。

假定随机微分方程(2.1) 的解存在且随机连续信号 $y_t$ 可测量[1]。本文的问题是: 对于可测量的 $y_t$ 和不可测量的随机连续扰动 $w_t$, 建立随机连续信号 $y_t$ 的数学模型, 即辨识模型(2.1) 中的未知参数 $a_i$。

对式(2.1) 所示的随机连续模型, 有如下能控的状态空间模型表示

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{B}\mathrm{d}w_t\\ y_t = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_t\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_t = \displaystyle\int_0^t \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s + \boldsymbol{B}w_t\\ y_t = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_t\end{cases} \tag{2.5}$$

其中

$$\boldsymbol{x}_t = \left[y_t\ \int_0^t y_s\mathrm{d}s\ \cdots\ \int_0^t\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{n-1}} y_{s_n}\mathrm{d}s_n\cdots\mathrm{d}s_1\right]^\tau$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = [1\ 0\ \cdots\ 0]^\tau,\quad \boldsymbol{C} = [1\ 0\ \cdots\ 0]$$

由常微分方程解理论和状态空间分析方法, 有如下关于状态空间模型(2.5) 的解定理:

**定理 1**　状态方程(2.5) 的解 $\boldsymbol{x}_t$ 可表示为

$$\boldsymbol{x}_t = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_{t_0} + \int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}\boldsymbol{B}\mathrm{d}w_s \tag{2.6}$$

证明　将式(2.6) 代入式(2.5) 的左边, 得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_t = \left[\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_{t_0} + \int_0^t \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}\boldsymbol{B}\mathrm{d}w_s\right]\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}\boldsymbol{B}\mathrm{d}w_s\Big|_{s=t} =$$
$$\boldsymbol{A}\left[\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_{t_0} + \int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}\boldsymbol{B}\mathrm{d}w_s\right]\mathrm{d}t + \boldsymbol{B}\mathrm{d}w_t =$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_t\mathrm{d}t + \boldsymbol{B}\mathrm{d}w_t$$

因此式(2.6) 为随机微分方程(2.5) 的解。(证毕)

由式(2.6) 有

$$\boldsymbol{x}_{t+\delta} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\delta}\boldsymbol{x}_t + \int_t^{t+\delta}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t+\delta-s)}\boldsymbol{B}\mathrm{d}w_s,\quad \delta > 0 \tag{2.7}$$

将式(2.7) 两边右乘以 $\boldsymbol{x}_t^\tau$ 并求期望, 得

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_{t+\delta}\boldsymbol{x}_t^\tau] = \mathrm{E}\left[\left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\delta}\boldsymbol{x}_t + \int_t^{t+\delta}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t+\delta-s)}\boldsymbol{B}\mathrm{d}w_s\right)\boldsymbol{x}_t^\tau\right] =$$
$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\delta}\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_t\boldsymbol{x}_t^\tau] + \mathrm{E}\left[\int_t^{t+\delta}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t+\delta-s)}\boldsymbol{B}\mathrm{d}w_s\boldsymbol{x}_t^\tau\right]$$

考虑到 $\boldsymbol{x}_t$ 与 $\mathrm{d}w_s(s > t)$ 统计无关且 $w_s$ 为零均值随机过程, 因此有

$$\boldsymbol{R}_x(t+\delta, t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\delta}\boldsymbol{R}_x(t, t) \tag{2.8}$$

其中 $\boldsymbol{R}_x(t+\delta, t) = \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_{t+\delta}\boldsymbol{x}_t^\tau)$ 为随机连续过程 $\boldsymbol{x}_t$ 的自相关函数阵。由式(2.8) 可得如下求解未知参数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的辨识算法。

$$\mathrm{e}^{\hat{\boldsymbol{A}}\delta} = \boldsymbol{R}_x(t+\delta, t)\boldsymbol{R}_x^{-1}(t, t) \tag{2.9}$$

因此, 本文辨识问题的关键在于自相关函数阵 $\boldsymbol{R}_x(t+\delta, t)$ 和 $\boldsymbol{R}_x(t, t)$ 的计算及其统计性质分析。

## 3　理论分析

本节分析随机连续模型(2.1) 的参数辨识(2.9) 的一致收敛统计特性。为便于分析, 首先将式(2.1) 和式(2.5) 所示的随机连续模型做如下调整。

$$y_t + a_1\int_{-\infty}^t y_s\mathrm{d}s + \cdots + a_n\int_{-\infty}^t\int_{-\infty}^{s_1}\cdots$$

$$\int_{-\infty}^{s_{n-1}} y_{s_n} \mathrm{d}s_n \cdots \mathrm{d}s_1 = w_t \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} x_t = \int_{-\infty} A x_s \mathrm{d}s + B w_t \\ y_t = C x_t \end{cases} \tag{3.2}$$

其中

$$x_t = \left[ y_t \quad \int_{-\infty} y_s \mathrm{d}s \quad \cdots \quad \int_{-\infty}\int_{-\infty}^{t} \cdots \int_{-\infty}^{s_{n-1}} y_{s_n} \mathrm{d}s_n \cdots \mathrm{d}s_1 \right]$$

对式(3.2)描述的随机连续信号 $y_t$ 和 $x_t$，可导出与式(2.9)一致的辨识算式。在分析辨识算法的统计特性之前，对随机连续系统(3.2)，有如下状态变量 $x_t$ 统计特性定理：

**定理 2**　当 $A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n$ 为稳定多项式，即其特征根均具有负实部时，式(3.2)所描述的 $x_t$ 是均值和自相关函数阵都为时间遍历的宽平稳随机连续过程。

证明　(1) 首先证明 $x_t$ 是宽平稳过程。由定理 1 知，模型(3.2)的解为

$$x_t = \mathrm{e}^{A(t-s)} x_s \Big|_{s=-\infty} + \int_{-\infty} \mathrm{e}^{A(t-s)} B \mathrm{d}w_s \tag{3.3}$$

考虑到 $A(s)$ 为稳定多项式，则矩阵 $A$ 为 Hurwitz(稳定)矩阵，其特征根均具有负实部。因此有

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{At} = 0, \quad x_t = \int_{-\infty} \mathrm{e}^{A(t-s)} B \mathrm{d}w_s$$

由上式知，式(3.2)描述的 $x_t$ 的自相关函数阵 $R_x(t+\delta, t)$ 为

$$\begin{aligned} & R_x(t+\delta, t) = \\ & \mathrm{E}\left[ \int_{-\infty}^{\delta} \mathrm{e}^{A(t+\delta-s)} B \mathrm{d}w_s \left( \int_{-\infty} \mathrm{e}^{A(t-s)} B \mathrm{d}w_s \right)^{\tau} \right] = \\ & \sigma^2 \mathrm{e}^{A\delta} \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{Az} B B^{\tau} \mathrm{e}^{A^{\tau} z} \mathrm{d}z \end{aligned} \tag{3.4}$$

由式(3.4)知，$R_x(t+\delta, t)$ 与绝对时间 $t$ 无关，仅与相对时间 $\delta$ 有关。由于无重特征值的情况可视为有重特征值情况的一种特例，因此仅从矩阵 $A$ 有重特征值情况来证明 $R_x(t+\delta, t)$ 是一有限矩阵。当 $A$ 的 $l$ 个互异特征根为 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, l)$，其重数为 $n_i \left( \sum_{i=1}^{l} n_i = n \right)$ 时，则矩阵指数函数 $\mathrm{e}^{At}$ 的各元素可表示为[11]

$$[\mathrm{e}^{At}]_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \sum_{r=0}^{n_k-1} c_{k,r}^{ij} t^r \mathrm{e}^{\lambda_k t}$$

其中 $c_{k,r}^{ij}$ 为相应系数。考虑到 $A$ 稳定，则对任意特征值 $\lambda_k$ 和 $\lambda_s$，$\lambda_k + \lambda_s$ 为非零且实部为负。因此有

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{Az} B B^{\tau} \mathrm{e}^{A^{\tau} z} \mathrm{d}z \right]_{ij} = \\ & \int_{0}^{\infty} \sum_{k=1}^{l} \sum_{r=0}^{n_k-1} \sum_{s=1}^{l} \sum_{m=0}^{n_s-1} c_{k,s,r,m}^{ij} z^{r+m} \mathrm{e}^{(\lambda_k+\lambda_s) z} \mathrm{d}z = \\ & \sum_{k=1}^{l} \sum_{r=0}^{n_k-1} \sum_{s=1}^{l} \sum_{m=0}^{n_s-1} c_{k,s,r,m}^{ij} \frac{(-1)^{r+m} (r+m)!}{(\lambda_k+\lambda_s)^{r+m+1}} \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中 $c_{k,s,r,m}^{ij}$ 为相应系数。由式(3.4)和(3.5)知，$R_x(t+\delta, t)$ 为与相对时间 $\delta$ 有关的有限矩阵，并记为 $R_x(\delta)$。考虑到

$$\mathrm{E}x_t = \mathrm{E}\left[ \int_{-\infty} \mathrm{e}^{A(t-s)} B \mathrm{d}w_s \right] = 0 \tag{3.6}$$

与时间 $t$ 无关，因此式(3.2)描述的随机连续信号 $x_t$ 为一宽平稳连续随机过程。

(2) 再证明 $x_t$ 的均值和自相关函数是时间遍历的，即有下述两条件成立[12]。

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{2T} \left( 1 - \frac{\delta}{2T} \right) [R_x(\delta) - \mathrm{E}x_t \mathrm{E}x_t^{\tau}] \mathrm{d}\delta = 0 \tag{3.7}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{2T} \left( 1 - \frac{u}{2T} \right) [B_x(\delta, u) - R_x^2(\delta)] \mathrm{d}u = 0 \tag{3.8}$$

其中 $B_x(\delta, u) = \mathrm{E}[(x_{t+\delta+u} x_{t+u}^{\tau})(x_{t+\delta} x_t^{\tau})]$ 为随机连续系统状态变量 $x_t$ 的四阶矩。由式(3.4)和(3.6)，对稳定的 $A$，有

$$\begin{aligned} & \| R_x(\delta) \| = \| \sigma^2 \mathrm{e}^{A\delta} \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{Az} B B^{\tau} \mathrm{e}^{A^{\tau} z} \mathrm{d}z \| \le \\ & k_1 \sigma^2 \mathrm{e}^{\lambda_1 \delta} \left\| \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{Az} B B^{\tau} \mathrm{e}^{A^{\tau} z} \mathrm{d}z \right\|, \quad k_1 \ge 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

其中，$\lambda_1$ 为 $A$ 的实部最大特征值，且 $\lambda_1$ 具有负实部；$\left\| \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{Az} B B^{\tau} \mathrm{e}^{A^{\tau} z} \mathrm{d}z \right\|$ 为有限常数阵。因此有

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\| \int_{0}^{2T} \left( 1 - \frac{\delta}{2T} \right) [R_x(\delta) - \mathrm{E}x_t \mathrm{E}x_t^{\tau}] \mathrm{d}\delta \right\| = 0 \tag{3.10}$$

故式(3.7)成立，即已证明宽平稳连续随机过程 $x_t$ 的均值是时间遍历的。

以下证明宽平稳连续随机过程 $x_t$ 的自相关函数阵 $R_x(\delta)$ 是时间遍历的。由于随机向量 $x_t$ 的四阶矩 $B_x(\delta, u)$ 表述较为烦琐，下面仅对 $x_t$ 为标量的情况加以证明，其结果同样适用于向量的情况。

由式(3.4)，当 $x_t$ 为标量时，由于系统矩阵 $A$ 具有负实部，因此有

$$R_x(\delta) = \sigma^2 \mathrm{e}^{A\delta} B^2 \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{2Az} \mathrm{d}z =$$

$$\sigma^2 e^{A\delta} B^2 \frac{1}{2A} e^{2Az} \Big|_0^\infty = -\frac{\sigma^2 e^{A\delta} B^2}{2A}$$

当 $u \geq \delta$ 时, 由式(1.7) 有

$$\begin{aligned} B_x(\delta, u) &= E[x_{t+\delta+u} x_{t+u} x_{t+\delta} x_t] = \\ & e^{2A(u+\delta)} B_x(0,0) - 3\sigma^4 \frac{e^{2A(u+\delta)}}{4A^2} B^4 + \\ & \frac{\sigma^4 e^{2Au}}{2A^2} B^4 + R_x^2(\delta) \end{aligned} \tag{3.11}$$

当 $u < \delta$ 时, 类似于上式, 有

$$\begin{aligned} B_x(\delta, u) &= e^{2A(u+\delta)} B_x(0,0) - 3\sigma^4 \frac{e^{2A(u+\delta)}}{4A^2} B^4 + \\ & 2R_x^2(\delta) + \frac{\sigma^4 e^{2Au}}{4A^2} B^4 \end{aligned} \tag{3.12}$$

因此, 对式(3.8) 有

$$\begin{aligned} & \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{u}{2T}\right) [B_x(\delta, u) - R_x^2(\delta)] du = \\ & \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_\delta^{2T} \left(1 - \frac{u}{2T}\right) \left[ e^{2A(u+\delta)} B_x(0,0) - \right.\right. \\ & \left. 3\sigma^4 \frac{e^{2A(u+\delta)}}{4A^2} B^4 + \frac{\sigma^4 e^{2Au}}{2A^2} B^4 \right] du + \\ & \left. \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{2T}\right) \left[ R_x^2(\delta) - \frac{\sigma^4 e^{2Au}}{4A^2} B^4 \right] du \right\} \end{aligned} \tag{3.13}$$

考虑到 $A$ 具有负实部, 则对有限的 $\delta$, 由式(3.13) 有

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{u}{2T}\right) [B_x(\delta, u) - R_x^2(\delta)] du = 0$$

即宽平稳连续随机过程 $x_t$ 的自相关函数阵 $R_x(\delta)$ 是时间遍历的。(证毕)

由定理 2 知, 对于随机连续信号模型(3.1), $y_t$ 及其 $1 \sim n-1$ 重积分值亦为均值和自相关函数是时间遍历的宽平稳随机连续过程。考虑到 $x_t$ 为自相关函数是时间遍历的, 则根据概率统计知识, 有

$$R_x(\delta) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{t_{i+1}} x_{t_i}^\tau$$
$$t_{i+1} - t_i = \delta > 0 \tag{3.14}$$

其中 $t_1, t_2, \cdots, t_N$ 为离散时刻。故自相关函数阵 $R_x(0)$ 和 $R_x(\delta)$ 可用下式逼近计算。

$$\hat{R}_x(k\delta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{(i+k)\delta} x_{i\delta}^\tau, \quad k = 0, 1 \tag{3.15}$$

其中, $N$ 为充分大的正整数, $x_{i\delta}$ 为随机连续过程 $x_t$ 的离散采样时刻的值。

基于上述分析, 对随机连续模型(3.1) 和(3.2) 的未知参数, 有如下辨识算法

$$\begin{aligned} e^{\hat{A}\delta} &= \hat{R}_x(\delta) \hat{R}_x^{-1}(0) = \\ & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{(i+1)\delta} x_{i\delta}^\tau \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i\delta} x_{i\delta}^\tau \right)^{-1} \end{aligned} \tag{3.16}$$

关于上述辨识值的一致收敛性, 有如下定理:

**定理 3** 随机连续模型(3.2) 的辨识值(3.6) 是一致收敛的。

证明 由式(3.6) 有

$$\begin{aligned} & \lim_{N\to\infty} e^{\hat{A}\delta} - e^{A\delta} = \\ & \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{(i+1)\delta} x_{i\delta}^\tau \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i\delta} x_{i\delta}^\tau \right)^{-1} - e^{A\delta} = \\ & e^{A\delta} R_x(0) R_x^{-1}(0) - e^{A\delta} = 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

即辨识值是一致收敛的。(证毕)

由定理 3 知, 对于随机模型(3.1), 式(2.9) 给出的辨识值是一致收敛的。

由定理 2 的证明过程知, 对于随机连续系统(2.1), 当模型稳定且 $t - t_0$ 充分大时, 则矩阵指数函数 $e^{A(t-t_0)}$ 趋近于零。相应地, 系统(2.5) 的状态变量 $x_t (t \gg t_0)$ 可视为均值和自相关函数是时间遍历的宽平稳随机连续过程。因此, 类似于式(3.15) 和(3.16), 对随机模型(2.1) 的参数辨识问题, 有

$$\hat{R}_x(k\delta) = \frac{1}{N - n_0 + 1} \sum_{i=n_0}^{N} x_{(i+k)\delta} x_{i\delta}^\tau$$
$$k = 0, 1 \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} e^{\hat{A}\delta} &= \hat{R}_x(\delta) \hat{R}_x^{-1}(0) = \\ & \sum_{k=n_0}^{N} x_{(i+1)\delta} x_{i\delta}^\tau \left( \sum_{i=n_0}^{N} x_{i\delta} x_{i\delta}^\tau \right)^{-1} \end{aligned} \tag{3.19}$$

其中, $n_0$, $N$ 和 $N - n_0$ 为充分大的正整数, $x_{i,\delta}$ 为 $x_t$ 在 $t_0 + i\delta$ 的离散采样值, $\delta$ 为采样周期。

因此, 由定理 3 知, 式(3.18) 和(3.19) 给出的随机模型(2.1) 的参数辨识值是一致收敛的。

## 4 辨识算法的数值实现

### 4.1 随机积分的数值实现

上节辨识算法需要状态变量 $x_{k,\delta}$ 的值。状态变量 $x_{k,\delta}$ 不可直接测量, 但可通过对随机信号 $y_t$ 加积分器后采样得到, 也可通过数值积分得到。下面讨论通过数值积分的 $x_{k,\delta}$ 的实现算法。令

$$\begin{cases} x_1 = y_t, \quad x_2 = \int_0^t y_s ds \\ x_i = \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{i-2}} y_{s_{i-1}} ds_{i-1} \cdots ds_1, \quad i > 2 \end{cases} \tag{4.1}$$

设采样周期为 $\delta$, $y_t$ 的采样值记为 $y_k (k = 0, 1, \cdots)$, 并记积分项 $x_i$ 在 $k\delta$ 时刻的数值积分值为 $x_{i,k}$。考虑到随机连续信号 $y_t$ 的光滑性, 由采样值 $y_t$ 计算积分 $x_i$ 时选用复化梯形法。复化梯形法简便, 有利于递推实现[3]。由复化梯形法计算积分值 $x_i$ 的递推式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{1,k} = y_k \\ \boldsymbol{x}_{i,k} = \boldsymbol{x}_{i,(k-1)\delta} + \dfrac{\delta}{2}(\boldsymbol{x}_{i,k-1} + \boldsymbol{x}_{i-1,k-1}), \quad i > 1 \end{cases} \tag{4.2}$$

**4.2　$\boldsymbol{A}$ 的计算**

上节的算法只讨论至 $e^{\hat{A}\delta}$ 的辨识, 下面讨论由 $e^{\hat{A}\delta}$ 至 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的数值计算问题。

**4.2.1　直接计算法**

由 Taylor 级数展开式, 对标量函数 $\ln(1+x)$, 有

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \cdots, \quad |x| < 1 \tag{4.3}$$

类似地, 可定义矩阵对数函数如下

$$\ln(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X} - \frac{\boldsymbol{X}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{X}^3}{3} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{\boldsymbol{X}^k}{k} + \cdots, \quad \|\boldsymbol{X}\| < 1 \tag{4.4}$$

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 稳定时, $\|e^{\hat{A}\delta} - \boldsymbol{I}\| < 1$。因此, 由 $e^{\hat{A}\delta}$ 计算参数辨识值 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的直接计算式如下

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \frac{\ln(e^{\hat{A}\delta})}{\delta} = (e^{\hat{A}\delta} - \boldsymbol{I}) - \frac{(e^{\hat{A}\delta} - \boldsymbol{I})^2}{2} + \frac{(e^{\hat{A}\delta} - \boldsymbol{I})^3}{3} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{(e^{\hat{A}\delta} - \boldsymbol{I})^k}{k} + \cdots \tag{4.5}$$

由式(4.5) 可计算辨识值 $\hat{\boldsymbol{A}}$。但由于式(4.5) 的级数收敛性不佳, 考虑到计算量和计算精度的原因, 下面给出另一种计算方法。

**4.2.2　约旦标准型变换法**

由矩阵对数函数定义(4.4) 知, 对非奇异变换阵 $\boldsymbol{P}$, 有

$$\boldsymbol{P}\ln(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{X})\boldsymbol{P}^{-1} = \ln(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}^{-1}) \tag{4.6}$$

因此, 对于矩阵 $\boldsymbol{X}$, 可通过非奇异变换将其变换成特殊形式矩阵, 然后通过对特殊形式矩阵求取矩阵对数函数后做反变换, 进而求得原矩阵的矩阵对数函数。下面讨论将矩阵变换成约旦阵, 进而求解矩阵对数函数的算法。

对矩阵 $e^{\hat{A}\delta}$, 总存在非奇异变换阵 $\boldsymbol{P}$($\boldsymbol{P}$ 由 $e^{\hat{A}\delta}$ 的特征向量和广义特征向量构成), 使得[11]

$$e^{\hat{A}\delta} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\,\mathrm{diag\text{-}block}[\boldsymbol{J}_1 \quad \boldsymbol{J}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{J}_m]\boldsymbol{P}^{-1} \tag{4.7}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{J}_i$($i = 1, 2, \cdots, m$) 分别为约旦阵和 $m_i \times m_i$ 维约旦块。对约旦块 $\boldsymbol{J}_i$, 由式(4.4) 可推导出其矩阵对数函数的计算式

$$\ln\boldsymbol{J}_i = \ln\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \boldsymbol{0} \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i\times m_i} = \begin{bmatrix} \ln\lambda_i & \dfrac{1}{\lambda_i} & \cdots & \dfrac{(-1)^{m_i-2}}{(m_i-1)\lambda_i^{m_i-1}} \\ \vdots & \ln\lambda_i & \cdots & \dfrac{(-1)^{m_i-3}}{(m_i-2)\lambda_i^{m_i-2}} \\ & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & & \ln\lambda_i \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

其中 $\lambda_i$ 为约旦块矩阵 $\boldsymbol{J}_i$ 的特征值, 其定义域为 $\lambda_i > 0$。因此, 由式(4.8) 可得矩阵 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的计算式如下

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \ln(e^{\hat{A}\delta}) = \boldsymbol{P}\ln\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\,\mathrm{diag\text{-}block}[\ln\boldsymbol{J}_1\ \ln\boldsymbol{J}_2\ \cdots\ \ln\boldsymbol{J}_m]\boldsymbol{P}^{-1} \tag{4.9}$$

**4.3　算法步骤**

由上节的辨识思想, 基于上述数值积分值 $\boldsymbol{x}_{k,\delta}$ 的递推计算和辨识矩阵 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的计算式(4.9), 可得如下随机连续信号模型(2.1) 的参数辨识算法步骤:

Step1: 确定模型阶次 $n$, 采样周期 $\delta$;

Step2: 对输出 $y_t$ 以采样周期 $\delta$ 进行采样;

Step3: 由式(4.2) 计算数值积分值 $\boldsymbol{x}_{i,k}$ 并构成状态向量 $\boldsymbol{x}_k$;

Step4: 利用式(3.19) 计算 $e^{\hat{A}\delta}$;

Step5: 利用式(4.9) 计算 $\hat{\boldsymbol{A}}$。

## 5　仿　　真

考虑如下二阶随机连续系统模型

$$y_t + 5\int y_s \mathrm{d}s + 6\int\int y_{s_2}\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1 = w_t \tag{5.1}$$

仿真过程如下:

1) 先以步长为 0.005 的数值计算方法模拟随机连续系统(5.1) 的运行, 其中随机扰动 $\mathrm{d}w_t$ 为 $[-\gamma\mathrm{d}t, \gamma\mathrm{d}t]$ 区间的高斯分布白噪声。

2) 以步长为 0.08 获取前一步系统模型(5.1) 模拟运行中输出 $y_t$ 的采样值。由于此时步长为模拟运行中步长的 16 倍, 故可大致认为估计中数据取自真正的随机连续系统模型。

3) 采用本文方法辨识模型(5.1)。

仿真时间为 16s(即获取采样数据 200组), 取后 8s(后100组数据) 由本文辨识算法辨识模型(5.1)。

仿真结果如表 1 所示。由表可见, 本文提出的辨识算法是十分有效的。

表 **1** 计算机仿真结果

| $a$ | 真值 | $\gamma$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 0.0 | 0.1 | 0.5 | 1.0 |
| $a_1$ | 5.0 | 5.000 0 | 5.010 6 | 4.973 7 | 4.949 5 |
| $a_2$ | 6.0 | 6.000 0 | 5.988 2 | 5.965 6 | 6.083 9 |

## 6 结 语

本文讨论由随机微分方程描述的随机连续信号 TSA 建模方法。文中证明了连续 Wiener 过程通过稳定的线性系统后为一平稳随机过程, 且其均值和自相关函数阵为时间遍历的。在此基础上, 基于状态空间分析, 推导出平行于离散随机过程 TSA 建模方法的连续随机过程 TSA 建模方法, 并证明了参数估计的一致收敛性。仿真结果显示了该方法的有效性。本文方法的优点是理论基础翔实, 算法实现简单, 避免了文献[1, 2] 中 CLS 法的解存在性问题、算法的实现和实用化问题, 以及[5～9] 中辨识收敛性分析上的缺憾。

本文的工作还可推广到受控随机连续系统和扰动(噪声) 模型的辨识以及自适应控制等方面。由于实际系统大多为连续系统, 相信随机连续系统的辨识和自适应控制无论在理论上还是在实际应用中都将得到进一步发展。

## 参 考 文 献

1 陈翰馥. 随机递推估计. 北京: 科学出版社, 1984

2 Chen H F, Guo L. Continuous-time stochastic adaptive tracking- Robustness and asymptotic properties. SIAM J Contr and Optim, 1990, 28(3): 513～527

3 赵明旺. 相关扰动下连续系统的连续时间 ELS 辨识的数值实现. 自动化学报, 1997, 23(4): 547～550

4 赵明旺. 基于滤波技术的随机连续系统 ELS 辨识及其数值实现. 控制理论与应用, 1998, 15(3): 439～442

5 Gevers M, Goodwin G C, Wertz V. Continuous-time stochastic adaptive tracking. SIAM J Contr and Optim, 1991, 29(2): 264～282

6 Sagara S, Zhao Z Y. Numerical integration approach to on-line identification of continuous-time systems. Automatica, 1990, 26(1): 63～74

7 赵明旺. 基于方块脉冲函数逼近的线性连续回归模型的参数估计及其应用. 数值计算与计算机应用, 1994, 15(3): 231～236

8 Zhao M W. Markov parameter estimation for stochastic continuous systems via chebyshev polynomials. In: Proc of 10th IFAC/IFORS Symp Syst Iden. Finland, 1994

9 赵明旺. 基于 Legendre 多项式逼近的随机连续系统的 Markov 参数估计. 控制与决策, 1994, 9(5): 372～374

10 Schuss Z. Theory and application of stochastic differential equations. New York: John Wiley & Sons, 1980

11 赵明旺. 现代控制理论基础. 北京: 冶金工业出版社, 1995

12 汪荣鑫. 随机过程. 西安: 西安交通大学出版社, 1988

13 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析. 武汉: 华中工学院出版社, 1983

## 作 者 简 介

赵明旺 男, 1964 年生。1990 年在浙江大学工业控制研究所获博士学位, 现任武汉科技大学研究生处处长, 信息科学与工程学院教授。主要研究兴趣为系统辨识与自适应控制, 智能控制与决策。