第 15 卷 第 5 期　　控　制　与　决　策　　2000 年 9 月
Vol. 15 No. 5　　CONTROL AND DECISION　　Sept. 2000

基于模糊双曲正切模型的 H_2 和 H_∞ 控制*

全永兵　张化光
(东北大学信息科学与工程学院　沈阳　110006)

摘　要　针对模糊双曲正切模型提出一种非线性二次性能指标,并给出使该性能指标最小的最优控制器的设计方法。同时扩展了线性 H_∞ 控制的概念,给出基于模糊双曲正切模型的 H_∞ 控制器的设计方法。

关键词　模糊双曲正切模型, H_2 控制, H_∞ 控制, 代数黎卡提方程(ARE)
分类号　TP 273⁺.4

H_2 and H_∞ Control Based on Fuzzy Hyperbolic Model

Quan Yongbing, Zhang Huaguang
(Northeastern University)

Abstract　A nonlinear quadratic function based on fuzzy hyperbolic model is proposed. The stable controller to minimize the nonlinear quadratic function is designed. In addition the concept of linear $H\infty$ control is extended. A new method to design the H_∞ controller is proposed.

Key words　fuzzy hyperbolic model, H_2 control, H_∞ control, algebraic Ricotta equation (ARE)

1　引　　言

模糊系统稳定性分析的困难在于模糊模型的复杂非线性。以往的 T-S 模型以及模糊动态模型[1]虽然可以任意精度逼近被控对象, 但其控制器设计却十分复杂。文献[2]提出一种新的模糊状态空间模型, 即模糊双曲正切模型, 其状态矩阵为状态变量的双曲正切函数, 输入矩阵为线性定常矩阵。模糊双曲正切模型具有如下特点:

1) 此模型为本质非线性模型;
2) 模型易于由几条模糊规则得到;
3) 有利于采用线性系统理论设计控制器。

本文在[2]给出的模糊双曲正切模型的稳定控制器求法的基础上, 提出一种非线性二次性能指标, 并给出了使该性能指标最小的 H_2 控制器的设计方法, 同时给出了扰动情况下 H_∞控制器的设计方法。

2　模糊双曲正切模型

本文采用模糊双曲正切模型来描述系统[2], 其状态方程为

$$\mathring{x} = A\tanh(Kx) + Bu \tag{1}$$

其中, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为状态变量, $u = (u_1, u_2, \cdots, u_p)^{\mathrm{T}}$ 为输入变量, $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times p}, K = \mathrm{diag}(k_1, k_2, \cdots, k_n), k_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为正常数。模糊双曲正切模型的建模方法参见[2]。本文研究包括模糊双典正切模型在内的更普遍的一类非线性系统。

定义 1[3]　令 S_c 为满足下列条件的所有 $R \rightarrow R$ 的函数 $f(\cdot)$ 的集合:

1) f 连续;
2) $f(0) = 0$, 对其它 $x \in R, f(x)x > 0$;
3) 当 $|x| \rightarrow \infty$ 时, $\int f(y)\mathrm{d}y \rightarrow \infty$。

3　H_2 控制器设计

针对如下非线性模型

$$\mathring{x} = Af(x) + Bu, \quad x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

其中 $f(x) = (f_1(x_1), \cdots, f_n(x_n))^{\mathrm{T}}$, 且 $f_i(\cdot) \in S_c$。本文将扩展 LQ 问题, 提出一种非线性二次型性能

* 1999－04－07 收稿, 1999－08－03 修回

指标函数

$$J(x_0,t_0,u)=\int_0^{\infty}(f^{\mathrm{T}}(x(t))Qf(x(t))+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t))\mathrm{d}t \quad (3)$$

其中Q和R均为给定的正定对称常数矩阵。目的是寻找控制器u,使J取最小值$J_{\min}$。

定义2 如果存在一个对角正定矩阵P,满足ARE方程

$$PA+A^{\mathrm{T}}P-PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+Q=0 \quad (4)$$

则称$[A,B,Q,R]$是可对角最优化的。

定理1 给定非线性系统(2)(其中$f(x)=(f_1(x_1),\cdots,f_n(x_n))^{\mathrm{T}}$,且$f_i(\cdot)\in S_c$)以及由式(3)定义的非线性二次型性能指标函数。如果$[A,B,Q,R]$是可对角最优化的,则其最优控制器为

$$u^*(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}Pf(x(t)) \quad (5)$$

其中$P=\mathrm{diag}(p_1,p_2,\cdots,p_n)$为满足式(4)的对角正定矩阵。设$J_{\min}(x_0,t_0)=\min\{J(x_0,t_0,u)\}$,则

$$J_{\min}(x_0,t_0)=2\sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{x_i(t_0)}f_i(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (6)$$

证明 由最优控制理论知,如果$J_{\min}(x(t))$满足H-J-B方程

$$-\partial J_{\min}/\partial t=\min_{u(t)}\{f^{\mathrm{T}}(x)Qf(x)+u^{\mathrm{T}}Ru+\nabla J_{\min}^{\mathrm{T}}\dot{x}\} \quad (7)$$

则使式(7)成立的$u^*(t)$为最优控制器。显然式(7)左边等于0。下面计算式(7)右边。

$$\nabla J_{\min}^{\mathrm{T}}\dot{x}=2f^{\mathrm{T}}(x)P(Af(x)+Bu)=f^{\mathrm{T}}(x)(PA+A^{\mathrm{T}}P)f(x)+2f^{\mathrm{T}}(x)PBu \quad (8)$$

令$H=f^{\mathrm{T}}(x)Qf(x)+u^{\mathrm{T}}Ru+\nabla J_{\min}^{\mathrm{T}}\dot{x}$,则有

$$\begin{aligned}H=&\ f^{\mathrm{T}}(x)(Q+PA+A^{\mathrm{T}}P)f(x)+2f^{\mathrm{T}}(x)PBu+u^{\mathrm{T}}Ru=\\&\ f^{\mathrm{T}}(x)(Q+PA+A^{\mathrm{T}}P-PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P)f(x)+(u+R^{-1}B^{\mathrm{T}}Pf(x))^{\mathrm{T}}R(u+R^{-1}B^{\mathrm{T}}Pf(x))\end{aligned} \quad (9)$$

根据ARE方程,上式第一项等于0,即

$$H=(u+R^{-1}B^{\mathrm{T}}Pf(x))^{\mathrm{T}}R(u+R^{-1}B^{\mathrm{T}}Pf(x)) \quad (10)$$

由于R正定,因此当$u=u^*=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}Pf(x(t))$时,$H$取最小值0,即

$$\min_{u(t)}\{f^{\mathrm{T}}(x)Qf(x)+u^{\mathrm{T}}Ru+\nabla J_{\min}^{\mathrm{T}}\dot{x}\}=f^{\mathrm{T}}(x)Qf(x)+u^{*\mathrm{T}}Ru^*+\nabla J_{\min}^{\mathrm{T}}\dot{x}=0 \quad (11)$$

则式(7)成立。求出$u^*(t)$后,便可计算此时的性能指标函数

$$\begin{aligned}&J(x_0,t_0,u^*)=\int_0^{\infty}(f^{\mathrm{T}}(x(t))Qf(x(t))+u^{*\mathrm{T}}(t)Ru^*(t))\mathrm{d}t=\\&\int_0^{\infty}(-\nabla J_{\min}^{\mathrm{T}}\dot{x})\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{d}J_{\min}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t=\\&J_{\min}(x_0)-J_{\min}(x(\infty))\end{aligned}$$

由于闭环系统渐近稳定,$x(\infty)=0$,因此$J(x_0,t_0,u^*)=J_{\min}(x_0)$。由最优化控制理论知,$J_{\min}(x_0,t_0)$为最优性能指标,$u^*(t)$为最优控制器。(证毕)

因为$\tanh(Kx)\in S_c$,因此对于模糊双曲正切模型,如果定义性能指标函数为

$$J(x_0,t_0,u)=\int_0^{\infty}(\tanh^{\mathrm{T}}(x(t))Q\tanh(x(t))+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t))\mathrm{d}t \quad (12)$$

其中Q和R为给定的正定对称常数矩阵,则使J取得最小值的控制器即最优控制器为

$$u^*(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}P\tanh(Kx) \quad (13)$$

其中P为满足ARE方程(4)的对角正定矩阵。

例1 根据[2]中的倒立摆模型,设$R=16$, $Q=\mathrm{diag}[160\quad 4]$,通过对系统状态变量做线性变换,可求出最优控制器为

$$u^*=-40\tanh(0.4(x_1+x_2)+\tanh(0.2x_2))$$

初始条件$\{x_1(0),x_2(0)\}=\{(40°,0),(70°,0),(80°,0)\}$时,$x_1(t)$的响应曲线如图1所示;$m=0.25\mathrm{kg}$, $M=0.8\mathrm{kg}$, $l=0.55\mathrm{m}$时,$x_1(t)$的响应曲

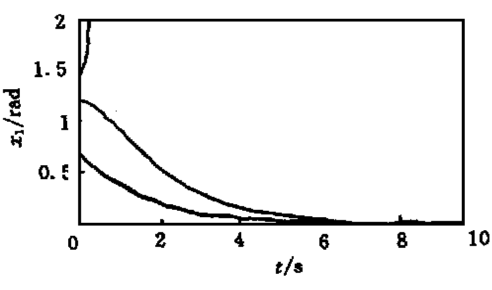

图1 最优控制器下$x_1(t)$的响应曲线

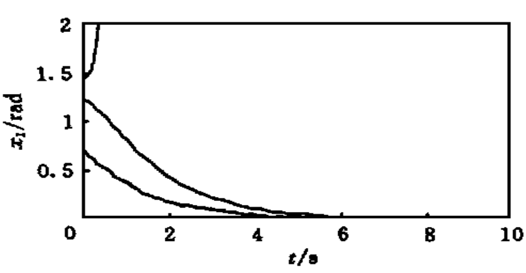

图2 倒立摆参数变动时$x_1(t)$的响应曲线

线如图 2 所示。由仿真结果看出, 对于前两个初始条件, 控制器可以很快镇定倒立摆, 并且在参数变化较大时, 控制效果基本没有变化, 可见所设计的控制器具有很强的鲁棒性。但是, 由于模糊双曲正切模型与倒立摆真实模型之间存在差别, 当初始条件大于 80°时, 闭环系统将不再稳定。

4　H_∞ 控制器设计

给定如下非线性系统

$$\begin{cases} \mathring{x} = Af(x(t)) + Bu(t) + Hw(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{14}$$

其中, $w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^{\mathrm{T}}$ 为扰动变量, $H \in R^{n\times m}$, 其它变量定义同式(1)。定义性能指标函数

$$J(x_0, t_0, u) = \int_0^\infty (f^{\mathrm{T}}(x(t))Qf(x(t)) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t) - w^{\mathrm{T}}(t)Sw(t))\mathrm{d}t \tag{15}$$

其中 Q, R 和 S 均为正定的对称常数矩阵。本文的目的是找到控制器 $u^*(t) = u^*(t, \{t, x(\tau)\}_{\tau=0}^{t})$ 及一有界函数 $\bar{L}(x_0)$, 使得

$$\sup_w J(u^*, w) \le \bar{L}(x_0) \tag{16}$$

即找到控制器 $u^*(t)$, 使 J 对所有任意扰动都保持有界。

定理 2　给定系统(14), 如果 $P_{\min}$ 为下列黎卡提方程的最小的对角正定解

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - P(BR^{-1}B^{\mathrm{T}} - DS^{-1}D^{\mathrm{T}})P + Q = 0 \tag{17}$$

记为 $P_{\min} = \mathrm{diag}(p_1, p_2, \cdots, p_n)$, 则满足式(16) 的控制器可由下式给出

$$u^*(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_{\min}f(x(t)) \tag{18}$$

且有

$$\bar{L}(x_0) = \bar{u}(t)2\sum_{i=1}^{n} p_i \int_0^{x_i(0)} f_i(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{19}$$

证明　设

$$V(x(t)) = 2\sum_{i=1}^{n} p_i \int_0^{x_i(t)} f_i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

则 V 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 2\sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x_i(t))\mathring{x}_i(t) = 2f^{\mathrm{T}}(x)P_{\min}(Af(x) + Bu + Hw) \tag{20}$$

由上式易证

$$f^{\mathrm{T}}(x)Qf(x) + u^{\mathrm{T}}Ru - w^{\mathrm{T}}sw + \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = f^{\mathrm{T}}(x)(Q + P_{\min}A + A^{\mathrm{T}}P_{\min} - P_{\min}(BR^{-1}B^{\mathrm{T}} - HS^{-1}H^{\mathrm{T}})P_{\min})f(x) + (u + R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_{\min}f(x))^{\mathrm{T}}R(u + R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_{\min}f(x)) - (w + S^{-1}D^{\mathrm{T}}P_{\min}f(x))^{\mathrm{T}}R(w + S^{-1}D^{\mathrm{T}}P_{\min}f(x))$$

将上式两边从 $t = 0$ 到 $t = t_f$ 积分, 并利用 ARE 方程(17), 可得

$$\int_0^{t_f}(f^{\mathrm{T}}(x)Qf(x) + u^{\mathrm{T}}Ru - w^{\mathrm{T}}Sw)\mathrm{d}t \le V(x(0)) + \int_0^{t_f}(u + R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_{\min}f(x))^{\mathrm{T}} \times R(u + R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_{\min}f(x))\mathrm{d}t \tag{21}$$

最后设

$$u(t) = u^*(t) = u + R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_{\min}f(x)$$

并令 $t_f \to \infty$, 则对任意 w, 有

$$J(u^*, w) \le V(x(0)) \tag{22}$$

取 $\bar{L}(x_0) = V(x(0))$, 则定理得证。(证毕)

根据[2] 中定理 1 还可证明: 在没有扰动的情况下, 根据定理 2 得出的控制器使闭环系统渐近稳定。

例 2　仍以[2] 中倒立摆模型为例来说明 H_∞ 控制器的求法。设有一未知扰动作用于 $\mathring{x}_2$, 则倒立摆的运动方程为

$$\mathring{x} = A\tanh(Kx) + Bu + Hw$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad K = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix},\quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对于如下定义的性能指标函数

$$J = \int_0^\infty ((\tanh(0.4x_1)\quad \tanh(0.2x_2))Q \times (\tanh(0.4x_1)\quad \tanh(0.2x_2))^{\mathrm{T}} + ru^2 - sw^2)\mathrm{d}t$$

其中

$$Q = \begin{bmatrix} 6\,000 & -2.5 \\ -2.5 & 0.25 \end{bmatrix},\quad r = 1,\quad s = 0.25$$

通过对系统状态变量做线性变换, 可求出使 J 对任意扰动 w 都保持有界的 H_∞ 控制器为

$$u^*(t) = -80\tanh(0.4(x_1 + x_2)) - \frac{1}{2}\tanh(0.2x_2)$$

将此控制器分别应用于模糊双曲正切模型和倒立摆真实系统, 假设各有一单位阶跃扰动($w = 1$) 分别作用于两系统的 $\mathring{x}_2$ 上, 初始条件为

$$\{x_1(0), x_2(0)\} = \{(40°, 0), (70°, 0), (89°, 0)\}$$

$x_1(t)$ 的响应曲线分别如图 3 和图 4 所示。从图中可以看出, H_∞ 控制器可以完全镇定模糊双曲正切模

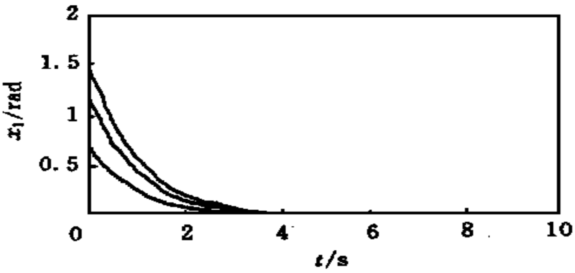

图 3 模糊双曲正切模型中 $x_1(t)$ 的响应曲线

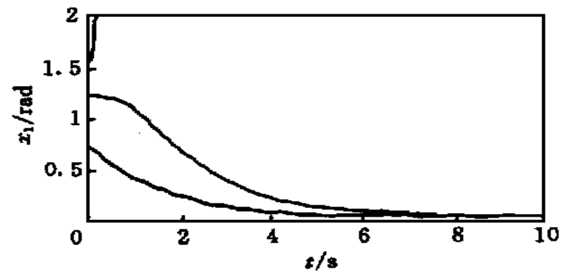

图 4 倒立摆系统中 $x_1(t)$ 的响应曲线

型, 且没有稳态误差。由于模糊双曲正切模型与真实对象之间存在差别, H_∞控制器只能局部镇定真实对象, 且存在稳态误差。

参 考 文 献

1 S G Cao, N W Rees, G Feng. Analysis and design for a class of complex control systems. Part Ⅱ: Fuzzy controller design. Automatica, 1997, 33(6): 1029～1039

2 张化光, 全永兵. 一类基于状态空间模型的模糊控制器. 自动化学报, 2000, 26(6): 729～735

3 E Kaszkurewicz, A Bhaya. Robust stability and diagonal Lyapunov functions. SIAM J on Matrix Analysis and Applications, 1993, 14(2): 508～520

作 者 简 介

全永兵 男, 1977 年生。1996 年于华中理工大学获学士学位, 东北大学信息科学与工程学院博士研究生。主要研究方向为模糊控制理论与应用等。

张化光 男, 1959 年生。东北大学电气自动化研究所所长, 教授, 博士生导师。研究领域为复杂系统的模糊自适应控制, 非线性控制, 混沌控制等理论及其在工业过程中的应用。

(上接第 552 页)

参 考 文 献

1 K Tanaka, M Sugeno. Stability analysis and design of fuzzy control systems. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45(2): 135～156

2 K Tanaka, T Ikeda, Hua O Wang. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability, H_∞ control theory and linear matrix inequalities. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1996, 4(1): 1～13

3 K Tanaka, M Sano. Fuzzy stable criterion of a class of nonlinear systems. Information Sciences, 1993, 71(1): 3～26

4 K Tanaka, M Sano. A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1994, 2(2): 119～134

5 T Takagi, M Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. IEEE Trans on Syst, Man and Cybern, 1985, 15(1): 116～132

6 Stephen Boyd, Laurent EI Ghaoui, Eric Feron. Linear matrix inequalities in system and control theory. Philadelphia: SIAM, 1994

7 Hua O Wang, K Tanaka, M Griffin. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1996, 4(1): 14～23

作 者 简 介

谢振华 男, 1965 年生。海军航空工程学院讲师, 西北工业大学自动控制系博士研究生。研究方向为模糊控制, 鲁棒控制。

范训礼 男, 1970 年生。西北工业大学自动控制系博士研究生。研究方向为鲁棒控制, 计算机网络。

曲建岭 男, 1968 年生。1998 年于西北工业大学获硕士学位, 现为西北工业大学博士研究生。研究方向为智能测量, 模糊控制等。

王 磊 男, 1961 年生。1985 年于西北工业大学获硕士学位, 1993 年获德国埃森大学模糊控制专业博士学位, 现为西北工业大学自动控制系教授, 博士生导师。主要研究领域为模糊测量技术, 温度控制等。

耿昌茂 男, 1937 年生。1964 年毕业于南京航空学院, 现为海军航空工程学院教授。研究方向为飞行控制, 容错控制。