

大系统块对角优分解*

赵 明 陈雪波

(鞍山钢铁学院电子工程系 114002)

摘要 以系统状态方程为模型,提出将系统矩阵 A 块三角分解后,通过非平衡补偿使其具有块对角优形式的分解方法。仿真实例证明该方法是可行的,它可简化模型为块对角型,为大系统分散控制设计与实现及并行处理提供了实用手段。

关键词 块三角分解, ϵ 处理, 非平衡补偿, 补偿因子, 块对角优分解

分类号 TP 13

Block Diagonally Dominant Decomposition of Large-scale Systems

Zhao Ming, Chen Xuebo

(Anshan Institute of Iron and Steel Technology)

Abstract An approach of block diagonally dominant decomposition which can simplify the model a block diagonal form is presented by taking the state equation of the system as a model. The approach makes A , a coefficient matrix that is decomposed by block triangle method, possess a block diagonally dominant form by using unbalance supplement. The simulation results illustrate that the approach is feasible. It is an effective to design, implement and process concurrently decentralized control of large-scale systems.

Key words block triangle decomposition, ϵ processing, unbalance supplement, supplement factor, block diagonally dominant decomposition

1 引 言

分散控制策略已广泛应用于大系统的分析与设计。作为分散控制,首先要解决的问题是如何分解系统以及分解后的形式。目前的分解方法主要有以下两种:

1) 按照实际子系统的物理边界来划分,例如块三角分解^[1]。这种分解方法可以得到子系统之间相互作用的重要信息,但由于分解结果为块上(或下)三角形式,给计算带来不便。

2) 不受子系统物理边界约束的分解方法,例如嵌套的 ϵ 分解^[2]和 BBD 分解^[3]等。这种方法的分解结果为块对角和有边界元素的块对角(BBD)的理想

形式,但却不适合系统方程。BBD 分解主要用于解高维的 Riccati 和 Lyapunov 方程^[4];而 ϵ 分解则主要用于解线性方程组,特别是在雅可比迭代中可体现出它的优势。

在系统状态方程系数矩阵 A 的块三角分解前提下,做非平衡补偿^[5]可以弱化非块对角阵元素的增益,使 A 具有块对角优的形式。 ϵ 处理可以扩大块三角分解的应用范围,改善块三角分解的结果,使分解更加理想。

2 系数矩阵 A 的块三角分解

设系统的状态和输出方程为

$$\dot{X} = AX + BU, \quad Y = CX + DU \quad (1)$$

其中, $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, B, C 和 D 具有

相应的维数。

当式(1)满足块三角分解的充要条件,即状态变量的信号流动图是非强连接的^[1],则可块上三角分解为

$$\hat{X} = \hat{A}\hat{X} + \hat{B}\hat{U}, \quad \hat{Y} = \hat{C}\hat{X} + \hat{D}\hat{U} \quad (2)$$

其中, $\hat{A} = P^TAP = (\hat{A}_{pq})_{m \times m}$ (当 $p > q$ 时, $\hat{A}_{pq} = 0$) 为块上三角形, $P_{n \times n}$ 为顺序矩阵, 且满足 $P^T P = I$, \hat{A}_{pq} 为 $i_p \times i_q$ 维矩阵, 且 $i_p = i_q = n; p, q = 1, 2, \dots, m; \hat{X} = P^T X, \hat{B} = P^T B, \hat{C} = CP, \hat{D} = D$ 。

定义1 系统方程同式(1),称系数矩阵A的元素 $|a_{ij}|$ 的值为耦合强度;忽略A中绝对值小于 ϵ 的元素的过程称为 ϵ 处理。

ϵ 处理是针对系统不能做块三角分解或分解效果不理想的情况所采取的一种措施。其基本思想是:通过适当选择 ϵ 值(在保证系统主要特征的情况下)做 ϵ 处理,然后做A的块三角分解,可使:1) 不满足块三角分解充要条件的系统能够进行分解;2) 调整块三角分解的结果使其更为简洁。从物理意义上看,忽略系数矩阵A中 $|a_{ij}| < \epsilon$ 的元素,相当于忽略系统中强度小于 ϵ 的耦合而形成新的物理边界。

3 块对角优分解

3.1 非平衡补偿^[5]

文献[5]以控制对象的传递函数阵 $G(S)$ 为模型,提出了非平衡补偿理论。本文将其推广到具有块划分的状态方程模型中。考虑式(1)的系数矩阵A,通过块划分后为 $A = (A_{pq})_{m \times m}$,其中 A_{pq} 为 $i_p \times i_q$ 维矩阵, $p, q = 1, 2, \dots, m$ 。取补偿阵 $H = \text{diag}(I_{i_1 \times i_1}, \eta_{i_2 \times i_2}, \dots, \eta^{m-1} I_{i_m \times i_m}), \eta > 0$ 。补偿后则

$$A_H = H^{-1}AH = \begin{bmatrix} A_{11} & \eta A_{12} & \eta^2 A_{13} & \dots & \eta^{m-1} A_{1m} \\ 1/\eta A_{21} & A_{22} & \eta A_{23} & \dots & \eta^{m-2} A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/\eta^{m-1} A_{m1} & 1/\eta^{m-2} A_{m2} & \dots & \dots & A_{mm} \end{bmatrix} \quad (3)$$

A_H 相似于A。

当 $\eta = 1$ 时, $H = I, A_H = A$; 当 $\eta < 1$ 时, A_H 的块对角阵不变,以块对角线为平衡点,上三角各非块对角阵前系数逐幂次减小,下三角的情况则相反;当 $\eta > 1$ 时, A_H 的块对角阵仍不变,而非块对角阵的变化与 $\eta < 1$ 时的情况相反。

定义2 如果系数矩阵A经式(3)补偿后得到

A_H , 则称H和 H^{-1} 为非平衡补偿阵, η 为非平衡补偿因子。当 $\eta = 1$ 时,称 A_H 是平衡的;当 $\eta \neq 1$ 时,称 A_H 是非平衡的。A通过H和 H^{-1} 相似补偿的过程称为非平衡补偿。

因为 A_H 与A相似,并且非平衡补偿阵H是非奇异的,所以 $|N - A|$ 与 $|N - A_H|$ 有相同的特征根,故闭环稳定性相同。因此,非平衡补偿并不影响系统的稳定性。

适当选取非平衡补偿因子 η , 可对矩阵A的非块对角阵做弱耦合补偿。如果讨论的系统A已具有块(上或下)三角形,那么通过非平衡补偿可使A达到一种新的近似平衡,即化A为块对角优(即非块对角阵元素被弱化而突出主块对角阵)的形式。实际上,只要能将A阵的非块对角阵元素弱化到一定程度,就可忽略非块对角阵,使其简化为块对角形式。

3.2 块对角优的非平衡补偿

设系统方程为式(1),且满足块三角分解的充要条件,则

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
$$\hat{A} = P^TAP = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \dots & \hat{A}_{1m} \\ 0 & \hat{A}_{22} & \dots & \hat{A}_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \hat{A}_{mm} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中, \hat{A}_{pq} 为 $i_p \times i_q$ 维矩阵($p, q = 1, 2, \dots, m$), $P_{n \times n}$ 为顺序矩阵,且 $P^T P = I$, 则 $\hat{X} = P^T X, \hat{B} = P^T B, \hat{C} = CP, \hat{D} = D$ 。取

$$H = \text{diag}(I_{i_1 \times i_1}, \eta_{i_2 \times i_2}, \dots, \eta^{m-1} I_{i_m \times i_m})$$
$$0 < \eta < 1$$

构造补偿阵

$$N = PH = P \text{diag}(I_{i_1 \times i_1}, \eta_{i_2 \times i_2}, \dots, \eta^{m-1} I_{i_m \times i_m}) \quad (5)$$

则对A所对应系统的非平衡补偿将得到

$$A_N = N^{-1}AN = (PH)^{-1}A(PH) = H^{-1}(P^{-1}AP)H = \hat{H}^{-1}(\hat{P}^T \hat{A} \hat{P})\hat{H} = \begin{bmatrix} A_{11} & \eta A_{12} & \dots & \eta^{m-1} A_{1m} \\ 0 & A_{22} & \dots & \eta^{m-2} A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{mm} \end{bmatrix}$$

$$B_N = N^{-1}B, \quad C_N = CN$$

$$D_N = D, \quad X_N = N^{-1}X \quad (6)$$

当非平衡补偿因子 $\eta = 0$ 时, A_N 块对角阵。

从非平衡补偿看, 补偿后系统的输出 $Y_N = C_N X_N + D_N U_N = CN(N^{-1}X) + DU = CX + DU$ 。因 $\eta = 0$, 但 $\eta \neq 0$, 所以这种补偿在理论上不影响系统输出。

定义 3 将系统的状态方程做上述处理, 使系数矩阵 A 具有块对角优形式的过程称为块对角优分解; 称 N 为块对角优补偿阵。

4 仿真实例

多机电力系统的数学模型^[6] 同式(1)。其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -64.8707 & -0.4334 & -57.1129 & 0 \\ -0.0837 & 0 & -0.3247 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7.6923 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 22.6716 & 0 & 6.8779 & 0 \\ 0.0173 & 0 & 0.0682 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18.1766 & 0 & 5.6883 & 0 \\ 0.0081 & 0 & 0.033 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -55.777 & 0.2703 & -53.5203 & 0 \\ -0.1302 & 0 & -0.394 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7.6923 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}^T$$

$$D = 0$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.1406 & 0 & 0.5966 & 0 \\ 2.102 & 0 & 1.673 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0665 & 0 & 0.074 & 0 \\ 0.0066 & 0 & 0.089 & 0 \\ -0.4055 & 0 & -0.4903 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0324 & 0 & 0.7422 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

这里取文献[6] 中 $C_{12 \times 8}$ 阵的 5, 6, 9 和 11 行作为本例的输出 C 阵。

采用 MATLAB 语言编制程序来实现块三角和块对角优分解, 则 A 被块三角分解为以 6×6 和 2×2 维阵为块对角线的上三角形式。若取 $\epsilon = 0.14$, 做 ϵ 处理后再块三角分解可得

$$\hat{A}_\epsilon = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -64.8707 & -0.4334 & 18.1766 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 22.6716 & 0 & -55.777 & 0.2703 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -57.1129 & 0 & 5.6883 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.8779 & 0 & -53.5203 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3247 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7.6923 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.394 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = P^T B, \quad \hat{C} = CP \quad (8)$$

可见, 结果为以 4×4 和 4×4 维阵为块对角线的上三角形。若取 $\eta = 0.0001$, 则 $H = \text{diag}(I_{4 \times 4}, 10^{-4} I_{4 \times 4})$, 块对角优补偿阵 $N = PH$ 。对 $\epsilon (\epsilon = 0.14)$ 处理后的系统做块对角优分解, 结果为

$$\hat{A}_{\epsilon v} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -64.8707 & -0.4334 & 18.1766 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 22.6716 & 0 & -55.777 & 0.2703 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -57.1129 \times 10^{-4} & 0 & 5.6883 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.8779 \times 10^{-4} & 0 & -53.5203 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3247 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7.6923 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.394 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$B_N = N^{-1}B =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.6923 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100000 \end{bmatrix}^T$$

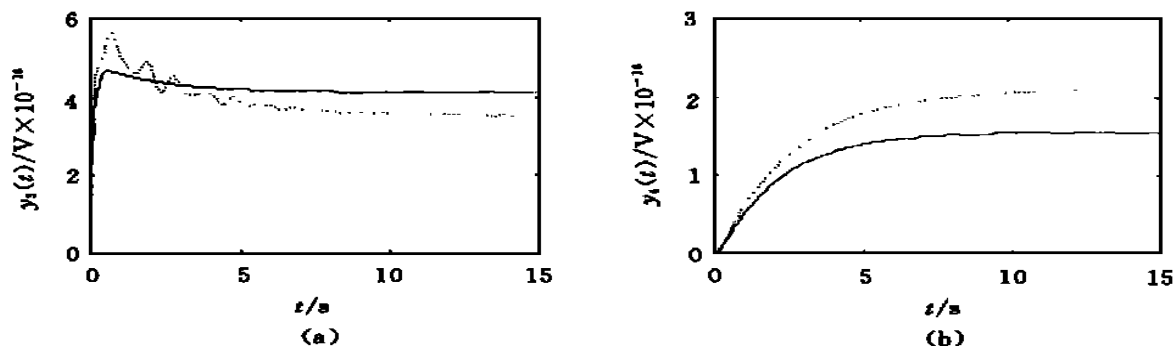


图1 闭环阶跃响应

(a) 输出 $y_3(t)$ 的阶跃响应(b) 输出 $y_4(t)$ 的阶跃响应

$$C_N = CN =$$

$$\begin{bmatrix} -0.1406 & 0 & 0.0066 & 0 & 0.5966 \times 10^{-4} \\ 2.102 & 0 & -0.4055 & 0 & 1.673 \times 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0665 & 0 & 0.0324 & 0 & 0.074 \times 10^{-4} \\ 0 & 0.089 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4903 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0.7422 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

可见, A_{eV} 为块对角优形式。图1为原系统式(7)与块对角优分解后式(9)忽略 A_{eV} 的非块对角阵后的系统,在相同控制条件下的闭环阶跃响应(虚线为原系统)。由图可见,在 η 尽可能小的情况下,做块对角优分解并忽略非块对角阵,可使 A_{eV} 简化成块对角型。从输出响应曲线可以看出,经块对角优分解并简化系统模型为块对角形式后,对系统总的影晌不大。因此,简化后的 A_{eV} 为块对角型的系统模型可以代替原系统的模型。

5 结 语

本文提出块对角优分解,目的是为了将系统模型最后简化成块对角型,从而有效地简化系统,为分散控制与设计及并行处理提供实用手段。 ϵ 处理是在块三角分解结果不理想或不能做块三角分解的情况下而采取的措施,可以扩大块对角优分解的适用范围。 ϵ 和 η 的取值应保证以不影响系统的稳定性和系统的主要特征为前提,往往要通过仿真试验来

确定。

参 考 文 献

- 1 张福恩. 大系统的分解. 信息与控制, 1980, 9(4): 26 ~ 31
- 2 Sezer M E, D D Siljak. Nested epsilon decompositions of linear systems: Weakly coupled and overlapping blocks. SIAM J on Matrix Analysis and Applications, 1991, 12(3): 521 ~ 533
- 3 Zecevic A I, D D Siljak. Balanced decompositions of sparse systems for multilevel parallel processing. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1994, 41(3): 220 ~ 233
- 4 Laub A J. Approximate solution of large sparse Lyapunov equations. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39(5): 1110 ~ 1114
- 5 陈雪波. 多变量系统的非平衡补偿. 控制与决策, 1989, 4(3): 31 ~ 34
- 6 陈准金, 韩英铎, 王仲鸿. 多机电力系统分散最优励磁控制器研究. 控制理论与应用, 1989, 6(3): 31 ~ 38

作 者 简 介

赵明男, 1963年生, 2000年在鞍山钢铁学院获硕士学位, 现为该校电子工程系副教授。主要研究方向为大系统分解理论, 智能仪器, 计算机控制系统的开发与研制。

陈雪波, 1960年生, 1994年在贝尔格莱德大学获技术科学博士学位, 现为鞍山钢铁学院电子与信息工程学院教授。主要研究方向为大系统, 复杂系统和多变量系统的结构分析与控制。