第 15 卷 第 5 期 控 制 与 决 策 2000 年 9 月
Vol. 15 No. 5 CONTROL AND DECISION Sept. 2000

LQ 最优控制系统加权矩阵 Q 的一种数值算法*

王 耀 青
(武汉科技大学自动化系 430081)

摘 要 利用 LQ 最优控制逆问题的参数化解,将求解对称、非负定加权矩阵 Q 的问题变为一类 F-范数优化问题,给出一种求解 LQ 最优控制指标函数中的加权矩阵 Q 的简便而系统的方法。算法的优点在于任意给定一组自变量,通过解这类优化问题就可求得满足闭环特征值要求的加权矩阵 Q,而且具有良好的收敛性。

关键词 LQ 逆问题,最优控制,加权矩阵,优化
分类号 TP 273

A Numerical Algorithm for the Weighting Matrix Q of LQ Optimal Control Systems

Wang Yaoqing
(Wuhan University of Science and Technology)

Abstract The simple and systematic numerical algorithm is given for solving the weighting matrix Q by transforming the problem of determing a symmetric, nonnegative weighting matrix to a F-norm optimization problem. The method has the advantage that the weighting matrix can be obtained to meet the requirements of the closed-loop eigenvalues by optimizing the F-norm with a set of initial variables arbitrarily chosen. Simulation shows that the algorithm has good performance in convergence.

Key words LQ inverse problem, optimal control, weighting matrix, optimization

1 问题的提出

LQ(线性二次型)最优控制逆问题所要研究的内容是如何确定 LQ 最优控制问题

$$\begin{cases} J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]\mathrm{d}t \\ \text{s.t. } \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

中的加权矩阵 Q 和 R,使得闭环控制系统

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t), \quad K = R^{-1}B^{\mathrm{T}}P \tag{1.2}$$

的特征值为期望值 $\lambda_{ci}(i = 1, 2, \cdots, n)$。式中的矩阵均为适当维数,且满足有关系统解存在的条件[1]。此外,式(1.2)的矩阵 P 是代数 Riccati 矩阵方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q = 0 \tag{1.3}$$

的唯一对称正定解。

对 LQ 最优控制逆问题的研究源于文献[2]。近年来,[3～9]在研究该问题的解析解法方面做了大量工作。[3,4]研究的是单输入控制系统问题,所得结果具有结构简单、计算容易的特点;[5,6]给出了 LQ 逆问题解的参数化表达式;[7]利用这一表达式,给出了单输入控制系统 LQ 逆问题的解析解法;[8,9]给出了多输入控制系统情况下的简便算法,但该算法具有一定的局限性,不能有效地解决闭环特征值为复数时求解加权矩阵 Q 的问题,主要原因在于算法属于构造性的。尽管这种构造性的算法为揭示问题的多解性提供了具有参考价值的信息,但

* 湖北省自然科学基金项目(99J042)
1999-11-08 收稿,2000-01-19 修回

对深入研究 LQ 最优控制逆问题解的多解特征, 并进一步研究 LQ 最优控制的鲁棒性, 不能提供有益的帮助。

本文在上述研究工作的基础上, 提出一种利用优化方法求解 LQ 最优控制逆问题的数值算法。其研究思想是将 LQ 最优控制逆问题的解转换为一种优化命题, 通过对优化命题的优化达到间接求解 LQ 最优控制逆问题解的目的。算法的求解过程对进一步揭示 LQ 最优控制逆问题解的多解特征, 认识多解意义下的最优性, 对控制系统性能的影响等问题, 提出了可供继续研究的新见解。

2　加权矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的参数化表示

为了保证 LQ 逆问题解的存在性, 假定 $\lambda_{ci} \in C^-_{\mathrm{opt}}(i = 1, 2, \cdots, n)$, 即假定 LQ 逆问题解存在。关于 $\lambda_{ci} \in C^-_{\mathrm{opt}}$ 的定义方法可参阅文献[5, 6]。

为表达方便, 引入如下数学符号的定义

$$\alpha_i = \alpha(\lambda_{ci})\alpha(-\lambda_{ci})$$

$$C = (B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B)$$

$$\Psi_i = CH\Lambda_i^+(HC\Lambda_i^-)^{\mathrm{T}} = \Psi_i^+(\Psi_i^-)^{\mathrm{T}}$$

$$\Lambda_i^{\pm} = [I_m \quad \pm\lambda_{ci}I_m \quad \cdots \quad (\pm\lambda_{ci})^{n-1}I_m]^{\mathrm{T}}$$

其中 H 是第一行为 $[a_1I_m \quad a_2I_m \quad \cdots \quad a_nI_m]$ 的左上三角 Toeplitz 矩阵, $a_i(i = 0, 1, \cdots, n)$ 为系统 (A, B) 的开环特征多项式

$$\begin{cases} \alpha(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \\ a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \\ a_n = 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

的系数, I_τ 为 $\tau \times \tau$ 维单位矩阵。在不致于混淆的情况下, 文中以 I 代替 I_τ。

定理 1[5, 6]　考虑由方程(1.1)～(1.3)所描述的线性二次型最优控制问题的逆问题。满足闭环特征值 $\lambda_{ci}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 要求的加权矩阵 Q(在 $R = I$ 的条件下)可参数化表示为

$$Q = -[\alpha_1\xi_1 \quad \alpha_2\xi_2 \quad \cdots \quad \alpha_n\xi_n] \times [\Psi_1\xi_1 \quad \Psi_2\xi_2 \quad \cdots \quad \Psi_n\xi_n]^{-1} \tag{2.2}$$

的充分必要条件是:

1) 系统(1.3)的特征值为 $\lambda_{ci}(i = 1, 2, \cdots, n)$, 且 λ_{ci} 的几何重根个数等于它的代数重根个数;

2) 当 $\lambda_{ci} \in \lambda(A)$ 或 $\lambda_{ci} \in \lambda(-A)$ 时, 矩阵 A 的特征值 $\{\lambda_{oi}\}_{i=1}^n$ 中的某个 $\lambda_{oi} = \lambda_{ci}$ 或 $\lambda_{oi} = -\lambda_{ci}$ 的几何重根个数为 1。

其中 $\xi_i \in C^{n\times 1}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的选取使得 $Q = Q^{\mathrm{T}} \geq 0$, $\Psi_i\xi_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 在复数空间 $C^{n\times n}$ 上线性独立; 且当 $\lambda_{ci} = \lambda_{cj}^*$ 时, $\xi_i = \xi_j^*$, * 表示复数共轭。

由定理 1 知, 在 $\lambda_{ci}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足定理 1 充分必要条件的情况下, 为了求得 LQ 最优控制逆问题的解, 关键是求解变量 $\xi_i(i = 1, 2, \cdots, n)$。一旦求得变量 $\xi_i(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则有如下推论:

推论 1[5]　方程(1.2)中的最优状态反馈系数矩阵 K 可以表示为

$$K = -[\alpha(\lambda_{c1})V_1 \quad \alpha(\lambda_{c2})V_2 \quad \cdots \quad \alpha(\lambda_{cn})V_n] \times [X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n]^{-1} \tag{2.3}$$

$$V_i = \alpha(-\lambda_{ci})B^{\mathrm{T}}(-\lambda_{ci}I - A^{\mathrm{T}})^{-1}\xi_i = (\Psi_i^-)^{\mathrm{T}}\xi_i \tag{2.4}$$

$$X_i = \alpha(\lambda_{ci})(\lambda_{ci}I - A)^{-1}BV_i = \Psi_i^+V_i = \Psi_i\xi_i \tag{2.5}$$

3　求解加权矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的优化算法

由定理 1 知, 变量 $\xi_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的确定是在矩阵 Q 满足 $Q = Q^{\mathrm{T}} \geq 0$ 和 $\{\Psi_i\xi_i\}_{i=1}^n$ 在 $C^{n\times n}$ 空间上线性独立这两个约束条件下进行的, 直接求解这一问题较为困难。文献[8, 9]给出一种构造方法。下面利用数值优化方法研究 LQ 逆问题解的求解方法。

引理 1[10]　当矩阵对 (A, B) 可控, λ_{ci} 互异时, 几乎对于所有的 $\xi_i \in C^{n\times 1}$, $\Psi_i\xi_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 在 $C^{n\times n}$ 空间上线性独立。

该引理表明在求解 LQ 逆问题时, 可以认为 $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ 是完全自由参数。这对于利用优化方法求解 LQ 逆问题解带来了极大的方便。定义

$$Y = (\alpha_1\xi_1 \quad \alpha_2\xi_2 \quad \cdots \quad \alpha_n\xi_n) \tag{3.1}$$

$$X = (X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n) = (\Psi_1\xi_1 \quad \Psi_2\xi_2 \quad \cdots \quad \Psi_n\xi_n) \tag{3.2}$$

则式(2.2)可表示为

$$Q = -YX^{-1} \tag{3.3}$$

为保证 Q 矩阵具有对称、非负定性, 定义具有逼近性质的目标函数

$$J = \mathrm{Tr}[(YX^{-1} - Q_s)^{\mathrm{T}}(YX^{-1} - Q_s)] \tag{3.4}$$

式中

$$\begin{cases} Q_s = U\mathrm{diag}[\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \cdots \quad \sigma_n]U^{\mathrm{T}} \\ U = [U_1 \quad U_2 \quad \cdots \quad U_n] \end{cases} \tag{3.5}$$

其中 $U_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为矩阵 $[Q^{\mathrm{T}}Q]$ 属于其特征值 $\sigma_i^2(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的特征矢量。

给定 $\xi_i(i = 1, 2, \cdots, n)$, 可以求得 Q 和 Q_s, 但 Q 不一定是问题的解, 只有通过对 $\xi_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的数值求解使得 Q 逐步逼近 Q_s, 当 $Q = Q_s$ 时, Q 才

是问题的解。此时, J 达到最优目标值零。

引理 2　对于 $\forall k \neq 0$, 式(2.2) 中的 $\xi_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 扩大或缩小 k 倍不改变矩阵 Q 的结果。

引理 2 表明 $\xi_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 模的大小不改变矩阵 Q 的计算结果。为此, 不妨假设矢量 ξ_i 的 2-范数 $\|\xi_i\|_2$ 满足 $\|\xi_i\|_2 = 1, i = 1, 2, \cdots, n$。

根据上述分析, 引入优化加权矩阵 $W(W = \mathrm{diag}(\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_n), \omega > 0)$, 则求解 LQ 逆问题解的综合优化指标函数可表示为

$$\begin{cases} \underset{\xi_i}{\mathrm{Min}}\, J = \\ \underset{\xi_i}{\mathrm{Min}}\mathrm{Tr}[(YX^{-1} - Q_s)^{\mathrm{T}} W (YX^{-1} - Q_s)] = \\ \mathrm{Tr}[(Q - Q_s)^{\mathrm{T}} W (Q - Q_s)] \\ \mathrm{s.t.}\ \|\xi_i\|_2 = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{3.6}$$

如果定义矩阵 $\bar{Q} = X^{\mathrm{T}} Q X$, 则有 $\bar{Q} = -X^{\mathrm{T}} Y$。仿照提出优化命题(3.6) 的原理, 还可得到另一种求解 LQ 逆问题的优化命题

$$\begin{cases} \underset{\xi_i}{\mathrm{Min}}\, J = \\ \underset{\xi_i}{\mathrm{Min}}\mathrm{Tr}[(X^{\mathrm{T}} Y - \bar{Q}_s)^{\mathrm{T}} W (X^{\mathrm{T}} Y - \bar{Q}_s)] = \\ \underset{\xi_i}{\mathrm{Min}}\mathrm{Tr}[(\bar{Q} - \bar{Q}_s)^{\mathrm{T}} W (\bar{Q} - \bar{Q}_s)] \\ \mathrm{s.t.}\ \|\xi_i\|_2 = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{3.7}$$

式中

$$\begin{cases} \bar{Q}_s = U \mathrm{diag}[\bar{\sigma}_1 \quad \bar{\sigma}_2 \quad \cdots \quad \bar{\sigma}_n] U^{\mathrm{T}} \\ U = [U_1 \quad U_2 \quad \cdots \quad U_n] \end{cases} \tag{3.8}$$

其中 $U_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为矩阵 $[\bar{Q}^{\mathrm{T}} \bar{Q}]$ 属于其特征值 $\bar{\sigma}_i^2(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的特征矢量。

为了便于求解优化命题(3.6) 和(3.7) 的解, 现给出如下结论:

定理 2　对于由(3.6) 式定义的一类优化命题, 其一阶梯度函数 $\partial J / \partial \xi_i$ 可表示为

$$\partial J / \partial \xi_i^{\mathrm{T}} = -2(\overbrace{0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1}^{i} \quad 0 \quad \cdots \quad 0) X^{-1} \times (Q - Q_s)^{\mathrm{T}} W (\alpha I - Q \Psi_i) \left(I - \frac{\xi_i \xi_i^{\mathrm{T}}}{\xi_i^{\mathrm{T}} \xi_i} \right) \tag{3.9}$$

证明　根据 J 的定义, 当 Q 具有增量 ΔQ 时, ΔJ 可以表示为

$$\Delta J = \mathrm{Tr}[(Q - Q_s + \Delta Q)^{\mathrm{T}} W (Q - Q_s + \Delta Q) - (Q - Q_s)^{\mathrm{T}} W (Q - Q_s)] \tag{3.10}$$

式中

$$\Delta Q = -[(Y + \Delta Y)(X + \Delta X)^{-1} - YX^{-1}] \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} \Delta X = [\overbrace{0 \quad \cdots \quad 0}^{i-1} \quad \Psi_i \Delta \xi_i \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \\ \Delta Y^{\mathrm{T}} = [\overbrace{0 \quad \cdots \quad 0}^{i-1} \quad \alpha_i \Delta \xi_i \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \\ \qquad i \in [1, n] \end{cases} \tag{3.12}$$

当 $\Delta \xi_i$ 充分小时, 可近似求得

$$[X + \Delta X]^{-1} \cong X^{-1} - X^{-1} \Delta X X^{-1} \tag{3.13}$$

$$\Delta Q = -[(Y + \Delta Y)(X + \Delta X)^{-1} - YX^{-1}] \cong -(\Delta Y X^{-1} - YX^{-1} \Delta X X^{-1}) \tag{3.14}$$

此时 ΔJ 关于 ΔQ 的一阶近似表达式为

$$\Delta J = \mathrm{Tr}[\Delta Q^{\mathrm{T}} W (Q - Q_s) + (Q - Q_s)^{\mathrm{T}} W \Delta Q] = 2\mathrm{Tr}[(Q - Q_s)^{\mathrm{T}} W \Delta Q] \triangleq \mathrm{Tr}[F \Delta Q] \tag{3.15}$$

式中 $F = 2(Q - Q_s)^{\mathrm{T}} W$。将式(3.14) 代入(3.15), 并利用式(3.3) 和(3.12), 由式(3.15) 可进一步求得 ΔJ 关于 $\Delta \xi_i$ 的一阶近似表达式

$$\Delta J \cong -\mathrm{Tr}[F(\Delta Y X^{-1} - YX^{-1} \Delta X X^{-1})] = -\mathrm{Tr}[X^{-1} F (\Delta Y - Q \Delta X)] = -(\overbrace{0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1}^{i} \quad 0 \quad \cdots \quad 0) \times X^{-1} F (\alpha I - Q \Psi_i) \Delta \xi_i \tag{3.16}$$

另一方面, 由 $\|\xi_i\|_2 = 1(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的约束条件可求得增量方程 $\Delta \xi_i^{\mathrm{T}} \xi_i = 0$, 且对于任意的 $\Delta \tilde{\xi}_i \in R^{m \times 1}$, $\Delta \xi_i = (I - \xi_i \xi_i^{\mathrm{T}} / \xi_i^{\mathrm{T}} \xi_i) \Delta \tilde{\xi}_i$。不妨取 $\Delta \tilde{\xi}_i = \Delta\xi\backslash - i$, 则方程(3.16) 变为

$$\Delta J = -2(\overbrace{0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1}^{i} \quad 0 \quad \cdots \quad 0) X^{-1} (Q - Q_s)^{\mathrm{T}} W (\alpha I - Q \Psi_i) \left(I - \frac{\xi_i \xi_i^{\mathrm{T}}}{\xi_i^{\mathrm{T}} \xi_i} \right) \Delta \xi_i \tag{3.17}$$

由此可以求得方程(3.9), 从而证明了定理 2。(证毕)

由 $\Delta \xi_i = (I - \xi_i \xi_i^{\mathrm{T}} / \xi_i^{\mathrm{T}} \xi_i) \Delta \tilde{\xi}_i$ 的表达式可知, 当 $m = 1$ 时, $\Delta \xi_i = 0$, 从而有 $\partial J / \partial \xi_i^{\mathrm{T}} = 0$。这表明对于 $m = 1$ 的控制系统无自由参数可供优化。此外, 由于 J 的最优目标值是零, 因此, W 的作用只有助于加快算法的收敛速度, 而不影响问题的求解。

定理 3　对于由式(3.7) 定义的一类优化命题, 其一阶梯度函数 $\partial J / \partial \xi_i$ 可表示为

$$\partial J / \partial \xi_i^{\mathrm{T}} = -(\overbrace{0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1}^{i} \quad 0 \quad \cdots \quad 0) \times$$

$$(\alpha F X^{T} + F^{T} Y^{T} \psi_i)\left(I - \frac{\xi_i \xi_i^{T}}{\xi_i^{T} \xi_i}\right) \tag{3.18}$$

式中 $F = 2(\bar{Q} - \bar{Q}_s)^{T} W$

4 复数特征值情况

当系统的闭环特征值为复数时, 利用文献[8, 9] 中的构造方法无法求解加权矩阵 Q。仿照上节的优化方法则可方便地解决这一问题。

为研究方便, 假定系统的第 1 和第 2 两个闭环特征值为复数, 即 $\lambda_{c1} = \lambda_{c2}^{*}$, 并且定义 $\xi_1 = \xi_2^{*} = \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 \mathrm{j}$, $\psi_1 = \psi_2^{*} = \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2 \mathrm{j}$, $\alpha_1 = \alpha_2^{*} = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 \mathrm{j}$ 以及变换矩阵

$$T_\tau = \text{Block} - \text{diag}\left[\begin{pmatrix} -0.5\mathrm{j} & 0.5 \\ 0.5\mathrm{j} & 0.5 \end{pmatrix} \otimes I_\tau, I_\tau, \cdots, I_\tau\right] \tag{4.1}$$

式中, $\otimes$ 为克罗内克尔积, T_τ 为 $\tau \times \tau$ 维的单位矩阵。用 T_1 和 T_n 对方程(2.2) 进行变换得到

$$\begin{aligned} Q = & \\ & -(\tilde{\xi}_2 \quad \tilde{\xi}_1 \quad \cdots \quad \xi_n)\,\text{Block} - \\ & \text{diag}\left[\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 & -\tilde{\alpha}_2 \\ \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_1 \end{pmatrix}, \alpha_3, \cdots, \alpha_n\right] \times \\ & \Big([\tilde{\psi}_2 \quad \tilde{\psi}_1 \quad \cdots \quad \psi_n]\,\text{Block} - \\ & \text{diag}\left[\begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 & -\tilde{\xi}_2 \\ \tilde{\xi}_2 & \tilde{\xi}_1 \end{pmatrix}, \xi_3, \cdots, \xi_n\right] \Big)^{-1} \triangleq \\ & -YX^{-1} \end{aligned} \tag{4.2}$$

在此基础上, 仿照定理 2 的证明过程, 可以求得式(3.6) 中 J 的增量

$$\begin{aligned} \Delta J = & \\ & \mathrm{Tr}[\Delta Q^{T} W (Q - Q_s) + (Q - Q_s)^{T} W \Delta Q] = \\ & 2\mathrm{Tr}[(Q - Q_s)^{T} W \Delta Q] = \\ & -\mathrm{Tr}[F(\Delta Y X^{-1} - Y X^{-1} \Delta X X^{-1})] = \\ & -\mathrm{Tr}[X^{-1} F(\Delta Y - Q \Delta X)] \end{aligned} \tag{4.3}$$

式中

$$\begin{cases} \Delta X = [\underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{i-1} \quad \psi_i \Delta\xi_i \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \\ \Delta Y = [\underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{i-1} \quad \alpha_i \Delta\xi_i \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \\ \qquad i \in [1, n] \end{cases} \tag{4.4}$$

当 $i = 1, 2$ 时, 有

$$\begin{cases} \Delta X = \\ [\tilde{\psi}_1 \Delta\tilde{\xi}_2 + \tilde{\psi}_2 \Delta\tilde{\xi}_1 \quad \tilde{\psi}_1 \Delta\tilde{\xi}_1 - \tilde{\psi}_2 \Delta\tilde{\xi}_2 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \\ \Delta Y = \\ [\tilde{\alpha}_1 \Delta\tilde{\xi}_2 + \tilde{\alpha}_2 \Delta\tilde{\xi}_1 \quad \tilde{\alpha}_1 \Delta\tilde{\xi}_1 - \tilde{\alpha}_2 \Delta\tilde{\xi}_2 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \end{cases} \tag{4.5}$$

将式(4.4) 和(4.5) 依次代入式(4.3), 可进一步求得 ΔJ 关于 $\Delta\xi_i$ 的一阶近似表达式

$$\Delta J \cong \begin{cases} -[(1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0) X^{-1} F(\tilde{\alpha}_2 I - Q\tilde{\psi}_2) + \\ (0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0) X^{-1} F(\tilde{\alpha}_1 I - Q\tilde{\psi}_1)]\Delta\tilde{\xi}_1 \\ \qquad i = 1 \\ -[(1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0) X^{-1} F(\tilde{\alpha}_1 I - Q\tilde{\psi}_1) - \\ (0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0) X^{-1} F(\tilde{\alpha}_2 I - Q\tilde{\psi}_2)]\Delta\tilde{\xi}_2 \\ \qquad i = 2 \\ -(\underbrace{0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1}_{i} \quad 0 \quad \cdots \quad 0) X^{-1} F \times \\ (\alpha_i I - Q\psi_i)\Delta\xi_i, \quad i = 3, 4, \cdots, n \end{cases} \tag{4.6}$$

考虑到约束条件 $\|\xi_i\|_2 = 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$, J 关于变量 ξ_i 的一阶梯度函数的表达式为

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_i^{T}} = \begin{cases} -[(1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0) X^{-1} F(\tilde{\alpha}_2 I - Q\tilde{\psi}_2) + \\ (0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0) X^{-1} F(\tilde{\alpha}_1 I - Q\tilde{\psi}_1)] \times \\ (I - \xi_1 \xi_1^{T} / \xi_1^{T} \xi_1), \quad i = 1 \\ -[(1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0) X^{-1} F(\tilde{\alpha}_1 I - Q\tilde{\psi}_1) - \\ (0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0) X^{-1} F(\tilde{\alpha}_2 I - Q\tilde{\psi}_2)] \times \\ (I - \xi_2 \xi_2^{T} / \xi_2^{T} \xi_2), \quad i = 2 \\ -(\underbrace{0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1}_{i} \quad 0 \quad \cdots \quad 0) X^{-1} F \times \\ (\alpha_i I - Q\psi_i) \times (I - \xi_i \xi_i^{T} / \xi_i^{T} \xi_i) \\ \qquad i = 3, 4, \cdots, n \end{cases}$$

式中 $F = 2(Q - Q_s)^{T} W$, Q_s 由式(3.7) 定义。

5 算法举例

例 1[8] 考虑一线性时不变可控连续时间系统

$$\mathring{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t)$$

取 $R = I$, $\lambda_{c1} = \lambda_{c2}^{*} = -2 + 1\mathrm{j}$, $\lambda_{c3} = -7$。求满足上述要求的加权矩阵 Q 和状态反馈系数矩阵 K。

对于本系统 $\alpha(s) = (s + 1)(s^2 + 4) = s^3 + s^2 + 4s + 4$。由此可求得

$$\alpha(\lambda_{c1}) = \alpha^{*}(\lambda_{c2}) = -3 + 11\mathrm{j}$$
$$\alpha(-\lambda_{c1}) = \alpha^{*}(-\lambda_{c2}) = 17 - 19\mathrm{j}$$
$$\alpha(\lambda_{c3}) = -318, \quad \alpha(-\lambda_{c3}) = 424$$
$$\alpha_1 = \alpha_2^{*} = 158 - 244\mathrm{j}, \quad \alpha_3 = -134\,832$$
$$\psi_1 = \psi_2^{*} =$$
$$\begin{bmatrix} 33 & 10 & 28 \\ -10 & -13 & -8 \\ 28 & 8 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -56 & -15 & -16 \\ 15 & -16 & -36 \\ -16 & 36 & 64 \end{bmatrix}\mathrm{j}$$

$$\Psi_3=\begin{bmatrix}2\,809 & 371 & 212\\ -371 & 2\,303 & 1\,316\\ 212 & -1\,316 & -752\end{bmatrix}$$

任意选取 $\xi_1=[1\quad 0\quad 0]^T$, $\xi_2=[0\quad 1\quad 0]^T$, $\xi_3=[0\quad 0\quad 1]^T$, $W=I$, 步长 $h=0.000\,25$, 经过 MATLAB 仿真软件仿真得到

$$Q=\begin{bmatrix}29.151\,5 & 24.436\,4 & -7.358\,0\\ 24.436\,4 & 32.848\,5 & -3.172\,6\\ -7.358\,0 & -3.172\,6 & 3.700\,2\end{bmatrix}\geq 0$$

$$P=\begin{bmatrix}4.476\,0 & 2.079\,2 & -1.772\,3\\ 2.079\,2 & 5.524\,0 & 0.248\,6\\ -1.772\,3 & 0.248\,6 & 1.596\,2\end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix}4.476\,0 & 2.079\,2 & -1.772\,3\\ 2.079\,2 & 5.524\,0 & 0.248\,6\end{bmatrix}$$

经验证,矩阵 $(A-BK)$ 的 3 个特征值为

$$\lambda_{c1}=\lambda_{c2}^{*}=-2+1j,\lambda_{c3}=-7$$

任意选取 $\xi_1=[1\quad 0\quad 0]^T$, $\xi_2=[1\quad 1\quad 0]^T$, $\xi_3=[1\quad 1\quad 1]^T$, $W=I$, 步长 $h=0.000\,5$, 经过 MATLAB 仿真软件仿真得到

$$Q=\begin{bmatrix}5.955\,7 & 14.502\,2 & 3.718\,4\\ 14.502\,1 & 56.044\,4 & 21.297\,6\\ 3.718\,6 & 21.297\,6 & 9.552\,4\end{bmatrix}\geq 0$$

$$P=\begin{bmatrix}1.635\,6 & 2.004\,5 & -0.204\,2\\ 2.004\,5 & 8.364\,4 & 2.242\,0\\ -0.204\,2 & 2.242\,0 & 1.352\,6\end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix}1.635\,6 & 2.004\,5 & -0.204\,2\\ 2.004\,5 & 8.364\,4 & 2.242\,0\end{bmatrix}$$

经验证,矩阵 $(A-BK)$ 的 3 个特征值为

$$\lambda_{c1}=\lambda_{c2}^{*}=-2+1j,\quad \lambda_{c3}=-7$$

6　结　　语

仿真表明,利用本文方法求解 LQ 逆问题解时,影响计算结果的因素有步长 h 和自变量 ξ_i。算法的收敛性几乎与 ξ_i 的初值无关,不同的初值可以得到不同的计算结果,解是非唯一的。尽管步长 h 的取值范围很大,算法的稳定性也很好,但适当地选取步长 h 可以明显地提高算法的收敛速度。

由于 Q 矩阵的非唯一性,必然存在一个解使得 LQ 最优控制具有更好的鲁棒性。因此,本文方法为进一步研究该问题带来了极大的方便。

参 考 文 献

1　Sage A P. Optimum systems control. N J Prentice-Hall, 1968

2　Kalman R E. When is a linear control system optimal? J Basic Eng Trans on ASME, 1964, 86D: 51～56

3　王耀青. 离散系统最优调节器的逆问题. 控制与决策, 1988, 3(1): 52～53

4　王耀青, 吕勇哉. 具有给定闭环极点的最优控制系统设计. 信息与控制, 1989, 18(3): 41～44

5　王耀青. LQ 逆问题的解(英文). 北京: 中国科学院研究生院学报, 1990, 7(1): 18～25

6　王耀青, 吕勇哉. 具有指定闭环特征值的离散时间最优调节器的设计. 控制理论与应用, 1991, 9(1): 135～141

7　王耀青. 单输入最优控制系统中 Q 矩阵的解析解法. 控制理论与应用, 1996, 13(3): 115～118

8　王耀青. LQ 最优控制系统中加权矩阵的确定. 自动化学报, 1992, 18(2): 213～217

9　王耀青. LQ 逆问题解的一种有效算法. 控制理论与应用, 1992, 9(1): 9～15

10　O Reilly J, Fahmy M M. The minimum number of degrees of freedom in state feedback control. Int J Control, 1985, 41(3): 749～768

作 者 简 介

王耀青　男, 1961 年生。1989 年在浙江大学获工学博士学位, 1989～1991 年在浙江大学能源工程研究所从事博士后研究工作, 现为武汉科技大学自动化系教授。主要研究领域为最优控制, 鲁棒控制系统设计, 控制系统参数化设计方法。