

全终端 3 状态复杂系统可靠性分析与决策*

张颖 刘艳秋 汪定伟
(沈阳工业大学理学院 110023) (东北大学信息科学与工程学院)

摘要 利用环和代数方法分析全终端 3 状态复杂系统的结构。针对该复杂系统可靠度的测算与决策, 提出相应的解决方法, 即从任何一棵初始生成树开始就可得到对应系统可靠度的方法。仿真实验表明了所提出方法的有效性。

关键词 3 状态复杂系统, 全终端, 可靠性, 环和

分类号 F 406. Z

Analysis and Decision of Reliability for All-terminal 3-state Complex System

Zhang Ying, Liu Yanqiu Wang Dingwei
(Shenyang Polytechnic University) (Northeastern University)

Abstract The structure of all-terminal 3-state complex system and some problem under reliability are analyzed by using the method of loop-sum and assimilate operation. Beginning at an initial spanning tree, the calculating of the corresponding complex systems can be obtained. A simulation example shows the usefulness of the proposed method.

Key words 3-state complex system, all-terminal, reliability, loop-sum

1 引言

系统的可靠性是指系统在一定的运行环境下在预定的时间内实现其功能的概率。现有的多状态复杂系统可靠性的研究, 几乎都是从组合数学的理论和应用入手来进行的^[1-5]。随着实际工程问题的变化, 特别是约束条件的增多, 状态空间的拓广, 源汇点问题的转变, 都将使系统的结构发生较大的变化。为准确刻画这一复杂系统的结构, 本文首次利用代数理论中的环和运算, 提出多状态复杂系统可靠性分析与决策的有效方法。仿真实验及系统可靠性的灵敏度分析说明了所提出方法的有效性与合理性。

2 问题描述

系统可靠性的评价, 首先要将系统的实际工程

图转变为系统可靠性框图或网络图, 由此对整个系统的可靠度进行计算和决策。

系统的工程原理图表示组成系统的部件、单元之间的物理关系和工作关系, 而可靠性框图则描述系统功能和组成系统的部件之间的可靠性功能关系。建立可靠性框图首先需要了解系统各部件的功能。部件在结构上的连接是串联的, 但在功能上并非一定串联。建立系统的可靠性框图必须保证系统功能关系的正确性。

为阐述问题方便, 使用系统网络 $G = (V, E)$ 来表示系统的功能关系。其中, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是节点集合, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 是边的集合。并且满足以下条件:

1) 无向网络 $G = (V, E)$ 表示 3 状态复杂系统, 边 e_1, e_2, \dots, e_m 表示组成复杂系统的部件(或设备、

* 国家自然科学基金项目(69684005)和 863 计划 CIMS 主题项目(863-511-9609-003)

装置), 节点 v_1, v_2, \dots, v_n 表示部件(或设备、装置)间的连接;

- 2) 部件及系统有且仅有 3 种状态, 即正常工作模型状态、短路失效模型状态及开路失效模型状态;
- 3) 网络中的节点是完全可靠的;
- 4) 组成系统的部件的失效是统计独立的, 并且每个部件对应模型状态下的概率是已知的;
- 5) 系统对应的问题是全终端问题。

利用组成系统部件对应模型下的概率(正常工作模型状态概率、短路失效模型状态概率、开路失效模型状态概率), 通过本文给出的方法可得到系统对应的 3 种模型状态概率, 从而对系统实施可靠性分析与决策。

3 方法的理论基础与模型

为了说明所提出方法的合理性, 现给出复杂系统的 3 种模型状态描述如下:

定义 1 如果系统中全体生成树中的所有边的状态都处于短路失效模型状态, 则称系统状态为短路失效模型状态。此时, 对应模型状态的概率用 $S(G)$ 表示。

定义 2 如果系统中每个生成树中至少有一条边处于开路失效模型状态, 则称系统状态为开路失效模型状态。此时, 对应模型状态的概率用 $Q(G)$ 表示。

定义 3 除定义 1 和定义 2 所述的系统两种失效模型状态以外的状态为系统正常工作模型状态。此模型状态对应的概率用 $P(G)$ 表示。

事实上, $P(G)$ 即为该系统的可靠度。显然, 由定义 1 ~ 定义 3, 有

$$P(G) = 1 - Q(G) - S(G)$$

本文提出的方法是从一棵初始生成树开始, 利用环和运算得到全体割集, 通过以下定理以及布尔代数和结构函数的合理使用, 求得对应复杂系统的可靠度, 进而对其实施决策与控制分析。

定理 1 一棵确定的 $G = (V, E)$ 的生成树与 $G = (V, E)$ 的一组确定的基本割集组是一一对应的。

根据生成树及基本割集组的定义易证定理 1^[6]。

图 1 为系统网络。其中粗线对应一棵 G 中确定的生成树, 记为 T , 则 $T = bcekl$, 它与基本割集组是一一对应的, $S_1 = ab, S_2 = acd, S_3 = def, S_4 = kfg,$

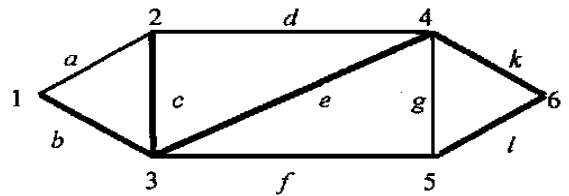


图 1 系统网络

定理 2 从某个基本割集组开始, 经过环和运算得到以下边组集合:

- 1) 所有割集组;
- 2) 割集组的边不共用并集。

利用环和的定义以及基本割集组的定义易证定理 2^[6]。

由定理 2 知, 从某个基本割集组开始, 经环和运算可以得到全体割集, 但含有割集组边不共用并集。经研究知, 这些割集组的边不共用并集可逐一识别并加以删除。为此, 给出如下吸收定义:

定义 4 设有限非空集合组 A_1, A_2, \dots, A_k , 如果 $A_i \subseteq A_j (i, j = 1, 2, \dots, k)$, 则称 A_i 吸收 A_j 或称 A_j 被 A_i 吸收。例如 $A_1 = \{a, b, c, d\}, A_2 = \{a, b, c\}, A_3 = \{a, b, c, e\}, A_4 = \{a, b, f\}, A_5 = \{a, b, c, d, f\}, A_6 = \{a, b, f, g\}$ 。显然, $A_2 \subset A_1, A_2 \subset A_3, A_4 \subset A_6$, 则经过吸收后的集合组为 A_2, A_4 。

定理 3 设 S_1, S_2, \dots, S_m 是某棵生成树对应的全体基本割集组, 则经过 $2^m - m - 1$ 次环和运算及 $2^m - 2m - 1$ 次吸收, 得到除基本割集组以外的全体割集组。

证明 由定理 2 及吸收定义知, 从某个基本割集组开始, 经环和运算可得全体割集组。

因为 m 基本割集组的所有环和形式分别为 $C_m^2, C_m^3, \dots, C_m^m$, 则所有的环和运算总数为

$$C_m^2 + C_m^3 + \dots + C_m^m = 2^m - m - 1 \quad (1)$$

同理可得所有吸收过程总数为 $2^m - 2m - 1$ 。

对于图 1 所示网络, 利用定理 1 ~ 定理 3 以及吸收定义, 得出环和运算与吸收过程表(见表 1)。

由表 1 可以看出, 若 $m = 5$, 则环和次数为 $2^m - m - 1 = 26$, 吸收总数为 $2^m - 2m - 1 = 21$ 。其全体割集分别为

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 = S_1 \oplus S_2, \quad S_7 = S_2 \oplus S_3$$

$$S_8 = S_3 \oplus S_4, \quad S_9 = S_4 \oplus S_5$$

$$S_{10} = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3, \quad S_{11} = S_2 \oplus S_3 \oplus S_4$$

$$S_{12} = S_3 \oplus S_4 \oplus S_5, \quad S_{13} = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_4$$

$$S_{14} = S_2 \oplus S_3 \oplus S_4 \oplus S_5$$

$$S_{15} = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_4 \oplus S_5$$

表1 环和运算及吸收过程表

环和集合	环和结果	是否构成新割	可被哪个割吸收
1	S_1, S_2	bcd	√
2	S_1, S_3	$abdef$	× S_1
3	S_1, S_4	$abkfg$	× S_1
4	S_1, S_5	$abkl$	× S_1
5	S_2, S_3	$acef$	√
6	S_2, S_4	$acdlfg$	× S_2
7	S_2, S_5	$acdkl$	× S_2
8	S_3, S_4	$dekg$	√
9	S_3, S_5	$defkl$	× S_3
10	S_4, S_5	lfg	√
11	S_1, S_2, S_3	$bcef$	√
12	S_1, S_2, S_4	$acdlfg$	× S_4
13	S_1, S_2, S_5	$bcdkl$	× S_5
14	S_1, S_3, S_4	$abdekg$	× S_1
15	S_1, S_3, S_5	$abdefkl$	× S_1
16	S_1, S_4, S_5	$ablfg$	× S_1
17	S_2, S_3, S_4	$acekg$	√
18	S_2, S_3, S_5	$acefkl$	× S_5
19	S_2, S_4, S_5	$acdlfg$	× S_2
20	S_3, S_4, S_5	$degl$	√
21	S_1, S_2, S_3, S_4	$bcekg$	√
22	S_1, S_2, S_3, S_5	$bceflkl$	× S_5
23	S_1, S_2, S_4, S_5	$bdlfg$	× $S_1 \oplus S_2$
24	S_1, S_3, S_4, S_5	$abdelg$	× S_1
25	S_2, S_3, S_4, S_5	$acelg$	√
26	S_1, S_2, S_3, S_4, S_5	$bcegl$	√

从全体割集组出发便可得到系统的可靠度。

定理4 设 S_1, S_2, \dots, S_k 是对应全终端3状态系统的所有割集, $\mathcal{Q}(G)$ 是全体割集对应的经不交和运算得到的结构函数, 即

$$\mathcal{Q}(G) = \prod_{i=1}^k S_i \quad (2)$$

则有

$$Q(G) = \mathcal{Q}(G) \Big|_{q_i^o} \quad (3)$$

$$S(G) = 1 - \mathcal{Q}(G) \Big|_{(1-q_i^o)} \quad (4)$$

$$P(G) = 1 - Q(G) - S(G) \quad (5)$$

其中 q_i^o 和 q_i^s 为第 i 条边对应的开路和短路失效模型状态概率。

4 算法

Step1: 输入已知信息 $G(V, E), e_i, V_i, q_i^o, q_i^s, i = 1, 2, \dots, l$, 其中 l 为 G 中边的个数;

Step2: 任取一棵初始生成树, 找出与之对应的基本割集组 S_1, S_2, \dots, S_m ;

Step3: 利用全体基本割集组, 列出环和运算以及吸收过程表, 从而得出全体割集;

Step4: 构造结构函数 $\mathcal{Q}(G)$, 求得可靠度

$$P(G) = \mathcal{Q}(G) \Big|_{(1-q_i^o)} - \mathcal{Q}(G) \Big|_{q_i^s} \quad (6)$$

Step5: 停止。

5 仿真实例

以图1所示网络为例, 已知信息如表2所示。

表2 已知信息表

	a	b	c	d	e	f	g	k	l
q_i^o	0.08	0.10	0.09	0.10	0.06	0.04	0.07	0.10	0.15
q_i^s	0.12	0.10	0.11	0.15	0.04	0.04	0.12	0.07	0.05

利用本文算法, 初始生成树为 $T = bcekl$, 对应的基本割集组为 $S_1 = ab, S_2 = acd, S_3 = def, S_4 = kfg, S_5 = kl$ 。对以上基本割集组实施环和运算以及吸收过程(见表1), 得到全体割集组分别为: $C_1 = ab, C_2 = kl, C_3 = acd, C_4 = bcd, C_5 = def, C_6 = kfg, C_7 = lfg, C_8 = acef, C_9 = bcef, C_{10} = dekg, C_{11} = degl, C_{12} = acekg, C_{13} = bcekg, C_{14} = acelg, C_{15} = bcegl$ 。

构造结构函数为

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(G) = & ab + \overline{ab}kl + \overline{abcd}kl + \overline{abcd}kl + \\ & \overline{abcd}ef + \overline{abcd}elkf + \overline{abcd}ekfg + \\ & \overline{abcd}ef \overline{gkl} + \overline{abcd}ef \overline{gkl} + \\ & \overline{abcd}ef \overline{gkl} + \overline{abcd}ef \overline{gkl} + \\ & \overline{abcd}ef \overline{gkl} + \overline{abcd}ef \overline{gkl} + \\ & \overline{abcd}ef \overline{gkl} + \overline{abcd}ef \overline{gkl} + \overline{abcd}ef \overline{gkl} \end{aligned}$$

$$Q(G) = 0.026, \quad S(G) = 0.196$$

$$P(G) = 1 - Q(G) - S(G) = 0.778$$

对应于该系统的可靠度为 77.8%。

另外, 当组成系统的元件的对应状态概率有一个微变 Δq_i^o 或者 Δq_i^s 时, 可利用本文算法, 得到系统对应的可靠度。进一步分析系统可靠性的灵敏度, 进而对系统实施控制与决策分析。

6 结语

本文首次利用环和及吸收运算分析了复杂系统的结构, 提出了若干定义及定理, 仅从一棵初始生成树开始, 得到对应系统的可靠度。仿真结果表明所提出的方法简单快捷、合理有效。

(下转第616页)

$$L(j) + 1 - r - j - 1 \quad (28)$$

不用 D 上运算而用普通运算, 可把第 4 项写成

$$\max\{d(w) \mid 2 - w - j - L(j)\} \quad (29)$$

其中

$$d(w) = \frac{b(r, j - w + 1)t(r, j)}{t(j)^w}$$

将式(29)这个增阶梯函数记为 $g^4(M)$ 。

第 5 项

$$g_5 = b(r, s) \quad (30)$$

显然是增阶梯函数, 记为 $g_5(M)$ 。

综上所述(注意用式(20)), 已证明了如下定理:

定理 1 不用 D 上运算, 而用普通运算描写批生产周期 c , 则有以下函数形式

$$c(M) = \max(\max\{t(j)M + \max(g_1(M), g_2(M), g_3(M), g_4(M)) \mid 1 - j - m\}, g_5(M))$$

其中, $g_1(M), g_2(M), g_3(M), g_4(M), g_5(M)$ 分别为由式(21), (25), (27), (29), (30)定义的增阶梯函数。

3 结 语

定理 1 指出 $c(M)$ 是一个分段连续函数(对于一

些应用例子, 只有一段或段数极少), 每段内是式(21a)所示的若干线性函数的极大函数。为求目标函数 $f = (w_1 + w_2 M) / c$ 的最大值, 只需求 $1/f$ 的最小值。可在每段内用文献[1]定理 2 的公式求得极小值, 然后比较所有段的极小值, 其中最小者就是最优解。利用定理 1 中各 $g_i(M)$ 的公式, 可得到目标函数 f 中的所有参数。该计算过程比文献[1]的相应过程更为具体和简化, 从而改进了调度算法。本文方法变通后也适用于多个变量及无阻塞的情况。

参 考 文 献

- 1 陈文德. 一类 DEDS 最优调度问题的解法. 自动化学报, 1997, 23(5): 591~597
- 2 Wende Chen, Renzhong Zhang. The optimal rhythm control of the multi-entry and multi-outlet series production lines. In: Proc of 14th World Congress of IFAC. Beijing, 1999, J: 1~6

作 者 简 介

陈文德 男, 1941年生。1968年毕业于中国科学院研究生院, 现为中国科学院数学与系统科学研究院研究员。研究方向为离散事件动态系统与编码。

(上接第 604 页)

参 考 文 献

- 1 K Gopal, K K Aggarwal, J S Gupta. Reliability analysis of multistate device networks. IEEE Trans on Reliab, 1978, 27(3): 233~236
- 2 C L Proctor, B Singh. The graphical reliability evaluation of three-state device networks. Microelectron Reliab, 1975, 15(2): 203~214
- 3 Ying Zhang, Yanqiu Liu, Dingwei Wang. Analysis of reliability for 3-state device networks with link-capacities. Systems Engineering and Electronics, 1999, 10(2): 69~74
- 4 H Gupta, J Sharma. A deltatstar transformation approach for reliability evaluation. IEEE Trans on Reliab, 1978, 27(3): 212~214
- 5 Brijendra Singh. Global reliability of three-state system.

Microelectron Reliab, 1996, 36(2): 241~242

- 6 吴文泷. 图论基础及应用. 北京: 中国铁道出版社, 1984

作 者 简 介

张颖 女, 1964年生。2000年于东北大学信息科学与工程学院获博士学位, 现为沈阳工业大学副教授。研究方向为生产计划和调度建模与优化, 智能优化方法, 系统可靠性优化。

刘艳秋 男, 1963年生。1999年于东北大学获博士学位, 现为沈阳工业大学副教授。研究方向为组合优化, 系统可靠性。

汪定伟 男, 1948年生。1993年于东北大学获博士学位, 现为东北大学教授, 博士生导师。研究方向为系统辨识, 参数估计, 优化理论与算法, 决策分析。