第 15 卷 第 5 期 控 制 与 决 策 2000 年 9 月
Vol. 15 No. 5 CONTROL AND DECISION Sept. 2000

一类 DEDS 最优调度算法的改进*

陈 文 德
(中国科学院数学与系统科学研究院 北京 100080)

摘 要 进一步研究一类 DEDS 最优调度问题,用极大代数方法得到了目标函数所有参数的简化公式,从而完善并改进了最优调度算法。该结果可用于含存储器的串行生产线。

关键词 离散事件动态系统,最优调度,极大代数
分类号 O 232

Improvement on a Kind of Optimal Scheduling Algorithms of Discrete Event Dynamic Systems

Chen Wende
(Institute of Systems Science, Academia Sinica)

Abstract A kind of optimal scheduling problems of discrete event dynamic systems was studied. Simplified formulations of all parameters of objective function were obtained by max-algebra method. The optimal scheduling algorithm has been perfected and improved. This result may be applied to series production lines with buffer.

Key words discrete event dynamic system(DEDS), optimal scheduling, max-algebra

1 问题描述

文献[1] 给出一类 DEDS 最优调度问题的解法。该解法特别适用于热轧生产线等系统的最优调度问题[2]。本文对其做了进一步研究,简化了目标函数非常复杂的计算过程,完善并改进了调度算法。

首先引用文献[1] 的问题与结果,但对其记号和细节略做改动和简化。

问题1 有 m 台机器(包括存储器,将其看成加工时间为零的机器) 组成串行生产线,进行批量生产,加工 n 种工件。以 $t_i(j)$ 表示第 i 种工件在第 j 台机器上加工所需时间,且均已知。设 n 种工件加工次序已排定,当第 1 台机器空出时就投入下一个工件。问题是:如何调度每种工件的数量 M_i,使每批生产 $N = \sum_{i=1}^{n} M_i$ 个工件,而单位时间的利润 $f = \sum_{i=1}^{n} w_i M_i / c$ 达到最大(这里 c 为加工一批工件所需时间,w_i 为第 i 种工件加工后所增利润)。这是一个十分困难的非线性整数规划问题。

2 最优调度算法的改进

文献[1] 首先研究了 $n = 2$, M_1 取为 1, M_2 记为 M 时一个变量的最优解;然后利用反复迭代的算法得到多个变量的最优解。本文主要研究一个变量的最优解,因而把 $t_2(j)$ 简记为 $t(j)$。令 R 为实数域, D 为极大代数($R \cup \{-\infty\}$, $\oplus$),其中 $a \oplus b = : \max(a, b)$, $ab = : a + b$。本文以下用Σ表示按 D 上$\oplus$运算求和。令 A 为 D 上 $m \times m$ 阶阵,则

* 国家自然科学基金项目(69874040) 和国家攀登计划项目
1999-07-27 收稿,1999-11-23 修回

$$A =:\begin{bmatrix} t(1) & 0 & & & \\ t(1,2) & t(2) & 0 & & -\infty \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ t(1,m-1) & t(2,m-1) & & t(m-1) & 0 \\ t(1,m) & t(2,m) & \cdots & & t(m) \end{bmatrix}$$

其中 $t(r,s) =: t(r) + t(r+1) + \cdots + t(s-1) + t(s)$

再令B为与A结构相同的阵,仅元素$t(j)$被$t_1(j)$取代。记B阵第r行第s列元素为$b(r,s)$,再记$(A^M)^\tau$阵第r行第s列元素为$a_{r,s}(M)$,设r,s取定。下面定义A的对角线元素的一串极大值。

定义1 令 $R =: \min(r,s)$, $S =: \max(r,s)$, $j =: \max\left\{i \mid i \in [R,S], t(i) = \sum_{k=R}^{S} t(k)\right\}$, $\hat{t}(1) =: \tilde{t}(1) =: t(j)$。当$r \le s$时,令$j_1 = j'_1 = 0$;当$r > s$时,令$j_1 = j'_1 = r - s$。若$j_{u-1} < j < j_u$时,有$t(r-j) \le \hat{t}(u-1)$,但$t(r-j_u) > \hat{t}(u-1)$,则对$u > 1$定义$\hat{t}(u) =: t(r-j_u)$,直到$t(r-j) = t(1)$,共定义出$\hat{t}(1), \hat{t}(2), \cdots, \hat{t}(P)$。若$j'_{v-1} < j < j'_v$时,有$t(s+j) \le \tilde{t}(v-1)$,但$t(s+j'_v) > \tilde{t}(v-1)$,则对$v > 1$定义$\tilde{t}(v) =: t(s+j'_v)$,直到$t(s+j) = t(m)$,共定义出$\tilde{t}(1), \tilde{t}(2), \cdots, \tilde{t}(Q)$。注意到每个$u$或$v$被唯一的一个机器序号$j$上的$t(j)$所定义,因而构成与$j$的一一对应关系。

引理1[1] 在上述记号和定义下,可得$(A^M)^\tau$元素的公式为

$$a_{r,s}(M) = \begin{cases} -\infty, & r > s, \quad M < r - s \\ 0, & r > s, \quad M = r - s \\ \sum_{u=1}^{z} t(r - j_u, s)\hat{t}(u)^{M-1-j_u} \oplus \\ \sum_{v=2}^{y} t(r, s + j'_v)\tilde{t}(v)^{M-1-j'_v}, & 否则 \end{cases} \tag{1}$$

其中

$$j_z < M \le j_{z+1}, \quad j'_y < M \le j'_{y+1} \tag{2}$$

进一步,串行生产线批量生产的状态方程可用D中运算列出,即

$$[x_1(k+1), \cdots, x_m(k+1)] = A_N[x_1(k), \cdots, x_m(k)], \quad A_N =: A^M B$$

其中$x_j(k)$表示第k批最后一个工件离开第j台机器的时间。批生产周期为

$$c = \sum_{s=1}^{m} a_s \tag{3}$$

这里a_s为A_N对角线上的元素。

为简化目标函数f,本文深入研究计算批生产周期$c(M)$。这里M常被看作正实数。由A_N的定义有$A_N = (B^\tau(A^M)^\tau)^\tau$,于是由式(3)和(1)有

$$c = \sum_{s=1}^{m} a_s = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} b(r,s)a_{r,s}(M) \tag{4}$$

由于上式中的r,s取遍$1,2,\cdots,m$,所以每个$t(j)$都能成为$\hat{t}(u)$, $\tilde{t}(v)$。固定一个j,考察取

$$\hat{t}(u) = t(j) \tag{5}$$

的r,s有哪些。首先定义某些记号:

定义2 将加工时间$t(1), t(2), \cdots, t(j), \cdots, t(m)$从左到右排列,记$t(j)$左边离$t(j)$最近的比$t(j)$大的加工时间为$t(\mathrm{Lb}(j))$,与$t(j)$相等的加工时间为$t(\mathrm{Le}(j))$,即

$$\begin{cases} t(i) \le t(j) \text{ 但 } t(\mathrm{Lb}(j)) > t(j) \\ \mathrm{Lb}(j) < i < j \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} t(i) < t(j) \text{ 但 } t(\mathrm{Le}(j)) = t(j) \\ \mathrm{Le}(j) < i < j \end{cases} \tag{7}$$

若这样的$\mathrm{Lb}(j)$, $\mathrm{Le}(j)$不存在,则记$\mathrm{Lb}(j)$, $\mathrm{Le}(j) = 0$。类似地,记$t(j)$右边离$t(j)$最近的比$t(j)$大的加工时间为$t(\mathrm{Rb}(j))$,与$t(j)$相等的加工时间为$t(\mathrm{Re}(j))$,即

$$\begin{cases} t(i) \le t(j) \text{ 但 } t(\mathrm{Rb}(j)) > t(j) \\ j < i < \mathrm{Rb}(j) \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} t(i) < t(j) \text{ 但 } t(\mathrm{Re}(j)) = t(j) \\ j < i < \mathrm{Re}(j) \end{cases} \tag{9}$$

若这样的$\mathrm{Rb}(j)$, $\mathrm{Re}(j)$不存在,则记$\mathrm{Rb}(j)$, $\mathrm{Re}(j) = m + 1$。并记$L(j) =: \max(\mathrm{Lb}(j), \mathrm{Le}(j))$; $R(j) =: \min(\mathrm{Rb}(j), \mathrm{Re}(j))$;记区间$[R,S] = [\min(r,s), \max(r,s)]$。

首先考察$j \in [R,S]$的情形。若$r \le s$,则有$r \le j \le s$。反设$r \le \mathrm{Lb}(j)$,则由定义1及(6)得$\hat{t}(u) \ge \hat{t}(1) \ge t(\mathrm{Lb}(j)) > t(j)$,与(5)矛盾。类似地,反设$s \ge \mathrm{Rb}(j)$,则由定义1及(8)得$\hat{t}(u) \ge \hat{t}(1) \ge t(\mathrm{Rb}(j)) > t(j)$,与(5)矛盾。所以仅允许$\mathrm{Lb}(j) + 1 \le r \le j$, $j \le s \le \mathrm{Rb}(j) - 1$。这时若$\mathrm{Re}(j)$不存在,则由定义1得$\hat{t}(1) =: t(j)$;若$\mathrm{Re}(j)$存在,则由定义1,当$s \ge \mathrm{Re}(j)$时,有$\hat{t}(1) =: t(\mathrm{Re}(j))$,即$\hat{t}(1)$由$t(\mathrm{Re}(j))$定义,而不是由$t(j)$定义,所以这些$s$不允许取。仅当$j \le s \le \mathrm{Re}(j) - 1$时,才有$\hat{t}(1) =: t(j)$。由$R(j)$的定义知,使(5)成立的$r,s$的范围为

$$\begin{cases} \mathrm{Lb}(j) + 1 \le r \le j \\ j \le s \le R(j) - 1 \end{cases} \tag{10}$$

同理,若$r > s$,则使(5)成立的r,s的范围为

$$\begin{cases} \mathrm{Lb}(j) + 1 \le s \le j \\ j \le r \le R(j) - 1, \quad r \ne s \end{cases} \tag{11}$$

然后考察$j \notin [R,S]$的情形。这时$u > 1$。若$r \le$

s，则由定义 1 有 $j = r - j_u < r$。反设 $s \geq \mathrm{Rb}(j)$，则由定义 1 及(6) 得 $\hat{t}(u) \geq t(\mathrm{Rb}(j)) > t(j)$，与(5) 矛盾。所以仅允许 $j + 1 \leq r \leq s \leq \mathrm{Rb}(j) - 1$。这时若 $\mathrm{Re}(j)$ 不存在，则由定义 1，得 $\hat{t}(u) = : t(j)$；若 $\mathrm{Re}(j)$ 存在，则由定义 1，当 $s \geq \mathrm{Re}(j) \geq r$ 时，有 $\hat{t}(1) = : t(\mathrm{Re}(j))$，即 $\hat{t}(1)$ 由 $t(\mathrm{Re}(j))$ 定义，而不是由 $t(j)$ 定义，所以这些 s 不允许取。当 $s \geq r > \mathrm{Re}(j)$ 时，有 $\hat{t}(u) = : t(\mathrm{Re}(j))$，即 $\hat{t}(u)$ 由 $t(\mathrm{Re}(j))$ 定义，而不是由 $t(j)$ 定义，所以这些 s 不允许取。仅当 $j \leq s \leq \mathrm{Re}(j) - 1$ 时，才有 $\hat{t}(u) = : t(j)$。由 $R(j)$ 的定义知，使(5) 成立的 r, s 的范围为

$$j + 1 \leq r \leq s \leq R(j) - 1 \tag{12}$$

同理，若 $r > s$，则使(5) 成立的 r, s 的范围为

$$j + 1 \leq s < r \leq R(j) - 1 \tag{13}$$

综合式(12) 和(13)，使式(5) 成立的 r, s 的范围为

$$\begin{cases} j + 1 \leq r \leq R(j) - 1 \\ j + 1 \leq s \leq R(j) - 1 \end{cases} \tag{14}$$

固定一个 j，类似地考察取

$$\tilde{t}(v) = t(j) \tag{15}$$

的 r, s 有哪些。由于(1) 中 $v > 1$，所以 $j \notin [R, S]$。可知使式(15) 成立的 r, s 的范围为

$$\begin{cases} L(j) + 1 \leq r \leq j - 1 \\ L(j) + 1 \leq s \leq j - 1 \end{cases} \tag{16}$$

定义一个 r, s 的范围为

$$1 \leq s < r \leq m, \quad r - s = M \tag{17}$$

由定义 1，满足式(5) 的 j 必有

$$j = r - j_u, \quad j_u = r - j \tag{18}$$

满足式(15) 的 j 必有

$$j = s + j_v, \quad j_v = j - s \tag{19}$$

对于简单的工程系统，可不计入条件(2)，则由式(1)，(4)，(19) 和(18) 可得

$$\begin{aligned} c(M) = \sum_{j=1}^{m} \Big(& \sum\nolimits_{10} b(r,s)\, t(r,s) / t(j) \oplus \\ & \sum\nolimits_{11} b(r,s)\, t(j)^{s-r} \oplus \\ & \sum\nolimits_{14} b(r,s)\, t(j,s)\, t(j)^{j-r-1} \oplus \\ & \sum\nolimits_{16} b(r,s)\, t(r,j)\, t(j)^{s-j-1} \Big)\, t(j)^{M} \oplus \\ & \sum\nolimits_{17} b(r,s) \end{aligned} \tag{20}$$

这里用 $\sum_a$ 表示在式(a) 所示的 r, s(或其它变量) 的范围内按 $\oplus$ 求和。

对于一般的工程系统，必须计入条件(2)，这使 c 更加复杂(注意：由式(2) 得 $M > j_z \geq j_1 \geq r - s$，于是式(1) 中"否则"的条件自然满足)。设 M 有一个工程中规定的上界 $\hat{m}$。不用 D 上运算，而用普通运算描写式(1) 第 3 行时，它是

$$\max\{a(i)M + d(i) \mid 1 \leq i \leq p\} \tag{21a}$$

形式的函数。条件(2) 中 $j_z < M \leq j_{z+1}$ 表示上式中当变量 M 增大时，斜率 $a(i)$ 取值由 $\hat{t}(1), \hat{t}(2), \cdots$ 一直增大到 $\hat{t}(z)$，而每个线性函数 $a(i)M + d(i)$ 的定义域为 $[j_i + 1, \hat{m}]$，这使式(21a) 在 $M = j_i + 1$ 处可能不连续而向上跳跃。条件(2) 中 $j'_y < M \leq j'_{y+1}$ 也具有相同的含义。

下面研究式(20) 中计入条件(2) 后每项的定义域。第 1 项

$$\sum\nolimits_{10} b(r,s)\, t(r,s) / t(j) \tag{21b}$$

由于 $j_1 = 0$，所以定义域为 $[1, \hat{m}]$。将这个不含 M 的常数函数记为 $g_1(M)$。

第 2 项 $\sum_{11} b(r,s)\, t(j)^{s-r}$ 最复杂。做变量代换 $w = r - s$，因为 $j_1 = r - s$，所以定义域为 $[w + 1, \hat{m}]$。由式(11) 知 w, r 的范围为

$$1 \leq w \leq R(J) - \mathrm{Lb}(j) - 2 \tag{22}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Lb}(j) + 1 \leq r - w \leq j \\ j \leq r \leq R(j) - 1 \end{cases} \tag{23}$$

第 2 项亦可写成

$$\sum\nolimits_{22} \Big(\sum\nolimits_{23} b(r, r - w) / t(j)^{w} \Big) \tag{24}$$

不用 D 上运算，而用普通运算描写式(24) 时，则有

$$\max\{d(w) \mid 1 \leq w \leq R(J) - \mathrm{Lb}(j) - 2\} \tag{25}$$

其中 $d(w) = \sum_{23} b(r, r - w) / t(j)^{w}$

由于 $d(w)$ 的定义域为 $[w + 1, \hat{m}]$，所以当且仅当截距 $d(w + 1) > d(w)$ 时，式(25) 在 $M = w + 1$ 处不连续而向上跳跃，将式(25) 这个增阶梯函数记为 $g_2(M)$。

第 3 项 $\sum_{14} b(r,s)\, t(j,s), t(j)^{j-r-1}$。做变量代换 $w = r - j + 1$，由式(18) 知 $j_i = j_u = r - j$，所以定义域为 $[w, \hat{m}]$。由式(14) 知 s 的范围为

$$j + 1 \leq s \leq R(j) - 1 \tag{26}$$

不用 D 上运算而用普通运算，可把第 3 项写成

$$\max\{d(w) \mid 2 \leq w \leq R(J) - j\} \tag{27}$$

其中

$$d(w) = \sum\nolimits_{26} b(w + j - 1, s)\, t(j,s) / t(j)^{w}$$

将式(27) 这个增阶梯函数记为 $g_3(M)$。

第 4 项 $\sum_{16} b(r,s)\, t(r,j)\, t(j)^{s-j-1}$。做变量代换 $w = j - s + 1$，由式(19) 知 $j'_v = j - s$，所以定义域为 $[w, \hat{m}]$。由式(16) 知 s 的范围为

$$L(j)+1 \le r \le j-1 \qquad (28)$$

不用D 上运算而用普通运算,可把第4 项写成

$$\max\{d(w) \mid 2 \le w \le j-L(j)\} \qquad (29)$$

其中

$$d(w)=\sum_{28} b(r, j-w+1)\, t(r, j)/t(j)^{w}$$

将式(29) 这个增阶梯函数记为 $g_4(M)$。

第5 项

$$\sum_{19} = b(r, s) \qquad (30)$$

显然是增阶梯函数,记为 $g_5(M)$。

综上所述(注意用式(20)),已证明了如下定理:

定理1 不用D 上运算,而用普通运算描写批生产周期 c,则有以下函数形式

$$c(M) = \max(\max\{t(j)M + \max(g_1(M), g_2(M), g_3(M), g_4(M)) \mid 1 \le j \le m\}, g_5(M))$$

其中, $g_1(M)$, $g_2(M)$, $g_3(M)$, $g_4(M)$, $g_5(M)$ 分别为由式(21),(25),(27),(29),(30) 定义的增阶梯函数。

3 结 语

定理1 指出 $c(M)$ 是一个分段连续函数(对于一些应用例子,只有一段或段数极少),每段内是式(21a) 所示的若干线性函数的极大函数。为求目标函数 $f = (w_1 + w_2 M)/c$ 的最大值,只需求 $1/f$ 的最小值。可在每段内用文献[1] 定理2 的公式求得极小值,然后比较所有段的极小值,其中最小者就是最优解。利用定理1 中各 $g_i(M)$ 的公式,可得到目标函数 f 中的所有参数。该计算过程比文献[1] 的相应过程更为具体和简化,从而改进了调度算法。本文方法变通后也适用于多个变量及无阻塞的情况。

参 考 文 献

1 陈文德. 一类DEDS 最优调度问题的解法. 自动化学报, 1997, 23(5): 591～597

2 Wende Chen, Renzhong Zhang. The optimal ryhthm control of the multi-entry and multi-outlet series production lines. In: Proc of 14th World Congress of IFAC. Beijing, 1999, J: 1～6

作 者 简 介

陈文德 男,1941 年生。1968 年毕业于中国科学院研究生院,现为中国科学院数学与系统科学研究院研究员。研究方向为离散事件动态系统与编码。

(上接第604 页)

参 考 文 献

1 K Gopal, K K Aggarwal, J S Gupta. Reliability analysis of multistate device networks. IEEE Trans on Reliab, 1978, 27(3): 233～236

2 C L Proctor, B Singh. The graphical reliability evaluation of three-state device networks. Microelectron Reliab, 1975, 15(2): 203～214

3 Ying Zhang, Yanqiu Liu, Dingwei Wang. Analysis of reliability for 3-state device networks with link-capacities. Systems Engineering and Electronics, 1999, 10(2): 69～74

4 H Gupta, J Sharma. A deltastar transformation approach for reliability evaluation. IEEE Trans on Reliab, 1978, 27(3): 212～214

5 Brijendra Singh. Global reliability of three-state system. Microelectron Reliab, 1996, 36(2): 241～242

6 吴文泷. 图论基础及应用. 北京: 中国铁道出版社, 1984 0

作 者 简 介

张 颖 女,1964 年生。2000 年于东北大学信息科学与工程学院获博士学位,现为沈阳工业大学副教授。研究方向为生产计划和调度建模与优化,智能优化方法,系统可靠性优化。

刘艳秋 男,1963 年生。1999 年于东北大学获博士学位,现为沈阳工业大学副教授。研究方向为组合优化,系统可靠性。

汪定伟 男,1948 年生。1993 年于东北大学获博士学位,现为东北大学教授,博士生导师。研究方向为系统辨识,参数估计,优化理论与算法,决策分析。