

一类有噪实序列最小项的位序研究*

熊海林 邓方林 刘洁瑜

(第二炮兵工程学院 301 教研室 西安 710025)

摘 要 分析等差递增实序列在受到均匀分布的白噪声污染后,其最小项位序变化的统计特性,求出最小项仍为首位的概率,并用数字仿真进行了直观的验证。这一结论在离散事件的优化及软优化研究中具有重要的应用价值。

关键词 递增实序列,均匀白噪声,位序,概率

分类号 O 211.5

Study on Location Order of a Class of Real Noised-sequences Minimum

Xiong Hailin, Deng Fanglin, Liu Jieyu

(The Second Artillery Engineering College)

Abstract Statistic characteristics of the location order of degree-increasing sequences minimum are analysed when the sequence is polluted by uniform white noise. The probability of the minimum being in the first location is given. It is verified with the numerical simulation. This conclusion has important applied values in the study of optimization and soft optimization of discrete events.

Key words degree-increasing real sequences, uniform white noise, location order, probability

1 引 言

离散数据的排序是实际生活中经常遇到的一类问题。有时排序的主要目的是为了找出序列的最大项或最小项。当所要排序的数据附有一定强度的噪声时,由其排出的序列的位序就不是真正的位序。虽然现在对噪声的处理有许多方法,但对长度较小的序列,这些方法并不十分有效,即噪声处理的方法也难以找出序列的真实位序。

本文从统计特性的角度来研究这类短序列的位序问题。递增实序列的最小项(位于序列的首位)受噪声污染后不一定再是最小项,但其仍能排在首位的概率有多大,其位于首位的概率与噪声的强度和分布又有何关系,这对优化和软优化研究非常有用。基于此,本文研究了递增实序列被均匀分布的白噪

声污染后最小项位序的统计特性,并用随机数字仿真的方法进行了直观验证。

2 有噪实序列

设 $\{a_i\}: a_1, a_2, \dots, a_n$ 为一等差递增实序列,其间差为 δ 。在测得数据时, $\{a_i\}$ 受到在 $[-\theta, \theta]$ 上均匀分布的随机白噪声 ϵ 的污染。 $\{a_i\}$ 被污染后,数据虽变而位序不变的有噪序列记为 $\{\tilde{a}_i\}$, $\tilde{a}_i = a_i + \epsilon$ 。问题是如何求出 \tilde{a}_1 在序列 $\{\tilde{a}_i\}$ 中仍为最小项的概率。

3 最小项位于首位的概率

引理 1 设 b_1 和 b_2 为 $[-\theta, \theta]$ 上独立同分布(均匀分布)的任意两个随机实数,则

$$P(b_1 < b_2) = P(b_1 > b_2) = 0.5 \quad (1)$$

证明 b_1 与 b_2 的关系有 3 种: $b_1 > b_2$, $b_1 = b_2$ 和

* 1999-11-04 收稿, 2000-02-14 修回

$b_1 < b_2$ 。因为区间 $[-\theta, \theta]$ 是连续的, b_1 和 b_2 等于 $[-\theta, \theta]$ 上任意一数的概率均为 0, 即有 $P(b_1 = b_2) = 0$, 故

$$P(b_1 < b_2) + P(b_1 > b_2) = 1 \quad (2)$$

又 $b_1 < b_2$ 与 $b_1 > b_2$ 是对称的, 因而 $P(b_1 < b_2) = P(b_1 > b_2)^{[1]}$, 代入式(2) 即得式(1)。(证毕)

定理 1 若 $\{a_i\}$ 是间差为 δ 的等差递增实序列, 则其受 $[-\theta, \theta]$ 上均匀分布的白噪声污染后, 位序不变的有噪序列 $\{\tilde{a}_i\}$ 的最小项仍为 \tilde{a}_1 的概率为

$$P = \sum_{i=1}^n P_i + P_\sigma \quad (3)$$

其中

$$P_1 = \delta/2\theta$$

$$P_2 = \frac{\delta}{2\theta} \left[1 - \frac{\delta}{4\theta} \right]$$

⋮

$$P_i = \frac{\delta}{(2\theta)^{i-1}} \prod_{j=1}^{i-2} (2\theta - j\delta) \times \left[1 + \prod_{k=1}^{i-1} C_{i-1}^k \left(-\frac{\delta}{4\theta} \right)^k \right]$$

$$P_\sigma = \frac{\sigma}{(2\theta)^n} \prod_{j=1}^n (2\theta - j\delta) \times \left[1 + \prod_{k=1}^n C_n^k \left(-\frac{\sigma}{4\theta} \right)^k \right]$$

式中, n 为小于等于 $2\theta/\delta$ 的最大整数, $2 < i \leq n$, $\sigma = 2\theta - n\delta$ 。

证明 $\{a_i\}$ 在数轴上的坐标是孤立点 a_i , $\{\tilde{a}_i\}$ 的每个点在数轴上都有一个散布区间 $[a_i - \theta, a_i + \theta]$ 。将 \tilde{a}_1 的散布区间 $[a_1 - \theta, a_1 + \theta]$ 用 δ 自左至右进行等分, 等分点分别为 $a_1 - \theta, a_2 - \theta, \dots, a_{n+1} - \theta$, 其中 n 为小于等于 $2\theta/\delta$ 的整数。由于 θ 和 δ 不一定满足倍数关系, 最后一般还有一个小区间 $[a_{n+1} - \theta, a_1 + \theta]$, 其长度设为 $\sigma = 2\theta - n\delta, \sigma < \delta$ 。再将等分后的区间自左至右顺序记为 D_1, D_2, \dots, D_n , 而 $D_{n+1} = [a_{n+1} - \theta, a_1 + \theta]$ (见图 1)。下面在 D_i 上分别求 \tilde{a}_1 为最小的概率 P_i 。

1) $\tilde{a}_1 \in D_1$: 此时由于 $\tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \dots$ 均不可能落入 D_1 中, 因而 \tilde{a}_1 一定为 $\{\tilde{a}_i\}$ 的最小项, 其概率与 D_1 的长度成正比, 即

$$P_1 = \frac{(a_2 - \theta) - (a_1 - \theta)}{2\theta} = \frac{\delta}{2\theta} \quad (4)$$

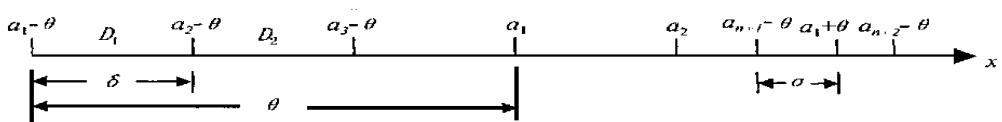


图 1 点在实轴上的分布

2) $\tilde{a}_1 \in D_2$: 此时 \tilde{a}_2 也可能落入 D_2 中, 而 $\tilde{a}_2 \notin D_1$, 因此 \tilde{a}_1 仍为最小项的条件是必须满足在 D_2 中 $\tilde{a}_1 < \tilde{a}_2$ 。其概率为

$$P_2 = P(\tilde{a}_1 \in D_2) [1 - P(\tilde{a}_1 \text{ 在 } D_2 \text{ 中不为最小})] = P(\tilde{a}_1 \in D_2) [1 - P(\tilde{a}_2 \in D_2) \times P(\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2 | \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \in D_2)] = \frac{\delta}{2\theta} \left[1 - \frac{\delta}{2\theta} \frac{1}{2} \right] = \frac{\delta}{2\theta} \left[1 - \frac{\delta}{4\theta} \right] \quad (5)$$

式(5) 利用了引理 1 的结论, 即

$$P(\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2 | \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \in D_2) = 0.5$$

3) $\tilde{a}_1 \in D_3$: 此时 \tilde{a}_2 和 \tilde{a}_3 均可能在 D_3 中, \tilde{a}_1 为最小项的条件为 $\tilde{a}_2 \notin D_2$, 且在 D_3 中 \tilde{a}_1 比 \tilde{a}_2 和 \tilde{a}_3 都要小, 因而在 D_3 中 \tilde{a}_1 为最小项的概率为

$$P_3 = P(\tilde{a}_1 \in D_3) P(\tilde{a}_2 \notin D_2) \times [1 - P(\tilde{a}_1 \text{ 在 } D_3 \text{ 中不为最小})] = P(\tilde{a}_1 \in D_3) P(\tilde{a}_2 \notin D_2) \times [1 - P(\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2 | \tilde{a}_1 > \tilde{a}_3 | \tilde{a}_2, \tilde{a}_3 \in D_3)]$$

因为

$$P(\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2 | \tilde{a}_1 > \tilde{a}_3 | \tilde{a}_2, \tilde{a}_3 \in D_3) = P(\tilde{a}_2 \in D_3) P(\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2) + P(\tilde{a}_3 \in D_3) P(\tilde{a}_1 > \tilde{a}_3) - P(\tilde{a}_2, \tilde{a}_3 \in D_3) P(\tilde{a}_2, \tilde{a}_3 < \tilde{a}_1) = \frac{\delta}{2\theta} \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2\theta} \frac{1}{2} - \left(\frac{\delta}{4\theta} \right)^2 = \frac{\delta}{2\theta} - \left(\frac{\delta}{4\theta} \right)^2 \quad (6)$$

所以

$$P_3 = \frac{\delta(2\theta - \delta)}{(2\theta)^2} \left[1 - \frac{\delta}{2\theta} + \left(\frac{\delta}{4\theta} \right)^2 \right] \quad (7)$$

4) $\tilde{a}_1 \in D_i, 2 < i \leq n$: 用同样的方法可得

$$P_i = P(\tilde{a}_1 \in D_i) P(\tilde{a}_2 \notin D_2 + D_3 + \dots + D_{i-1}) \dots P(\tilde{a}_{i-1} \notin D_{i-1}) \times [1 - P(\tilde{a}_1 \text{ 在 } D_{i-1} \text{ 中不为最小})] = \frac{\delta^{i-2}}{(2\theta)^{i-1}} \prod_{j=1}^{i-2} (2\theta - j\delta) \left[1 + \prod_{k=1}^{i-1} C_{i-1}^k \left(-\frac{\delta}{4\theta} \right)^k \right] \quad (8)$$

5) $\tilde{a}_1 \in D_{n+1}$: 直接利用 4) 的结论则有

$$P_\sigma = \frac{\delta^{n-1}}{(2\theta)^n} \prod_{j=1}^{n-1} (2\theta - j\delta) \left[1 + \prod_{k=1}^n C_n^k \left(-\frac{\sigma}{4\theta} \right)^k \right] \quad (9)$$

表1 试验结果与理论值($N = 50, \delta = 1$)

	测量次数										$P_{\text{仿真}}$	$P_{\text{理论}}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
$\theta = 1$	0.880	0.878	0.876	0.876	0.875	0.878	0.878	0.864	0.865	0.863	0.873 2	0.875 0
$\theta = 2$	0.672	0.676	0.678	0.665	0.694	0.663	0.688	0.682	0.661	0.680	0.675 9	0.675 1
$\theta = 3$	0.541	0.565	0.550	0.555	0.547	0.549	0.537	0.529	0.542	0.534	0.544 9	0.550 1
$\theta = 4$	0.484	0.460	0.487	0.473	0.482	0.460	0.464	0.486	0.480	0.478	0.475 4	0.471 2

表2 真实序列与受污染序列

真实序列	a_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	位序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
受污序列	\tilde{a}_i	11.03	10.59	11.84	14.58	15.84	15.25	15.29	18.68	20.71	18.89
	位序	1	2	3	4	6	7	5	8	9	10

综合 1) ~ 5), 则得到 \tilde{a}_i 为 $\{\tilde{a}_i\}$ 中最小项的概率为式(3)。(证毕)

从定理 1 的证明过程不难发现, 当噪声强度 θ 已知时, 可以调整 δ 来保证序列首位在受到噪声污染后位序不变, 即有如下推论:

推论 1 当间差为 δ 的等差实序列受到强度为 θ 的噪声(在 $[-\theta, \theta]$ 上均匀分布) 污染, 则其首位位序不变的充分条件为

$$\theta/\delta \leq 1/2 \quad (10)$$

4 仿真分析

4.1 最小项为首位的概率仿真

下面利用 Monte-Carlo 方法进行随机数字仿真试验。首先利用 Matlab 5.0 中的随机函数 $\text{rand}(\cdot)$ 产生 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机数, 再构成白噪声 $\epsilon = 2[\text{rand}(\cdot) - 0.5]\theta$ 将其加到一个长度为 50 的实序列 $a_i = 100 + i (i = 1, 2, \dots, 50)$ 上 ($\delta = 1$)。现改变噪声的强度 θ , 统计序列 $\tilde{a}_i = a_i + \epsilon$ 首位仍为最小项的概率。

对每一个 θ 值做 10 次试验, 每次统计 1000 个样本点, 测得结果如表 1 所示。从表中可以看出, 随着试验次数的增加, 试验值 $P_{\text{仿真}}$ 与理论值 $P_{\text{理论}}$ 越来越接近。 \tilde{a}_1 仍为首位的概率与噪声强度 θ 的关系如图 2 所示(由于 $P_{\text{仿真}}$ 与 $P_{\text{理论}}$ 相差无几, 图中只画出一条曲线)。从图 2 可以看出, 噪声强度 θ 与序列间差 δ 的比值越大, \tilde{a}_1 位居首位的概率越小。当 θ/δ 约为 3.3 时, 其概率下降到 0.5 以下, 这时序列的位序已无多大实际意义。

4.2 示例仿真

设 $\theta = 2, \delta = 1$, 真实序列为 $a_i = 10$ 。取前 10 项列于表 2 中第 1 行, 其各项的位序列于第 2 行。现用均匀随机噪声进行污染, $\{a_i\}$ 的各项值发生了变化,

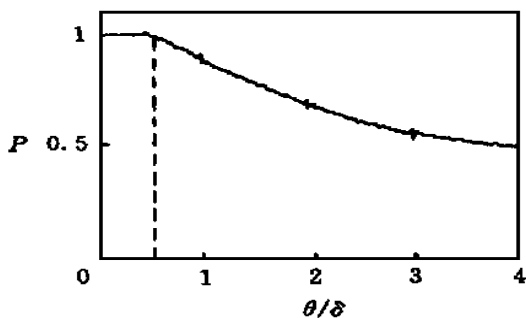


图2 序列首位概率随噪声的变化曲线

其值列于表 2 中第 3 行, 新的位序列于第 4 行。表 2 给出的是一次仿真实验的结果, 表明噪声对序列的位序产生了影响。噪声对最小项的影响, 上面已做了研究, 而对其它项的影响尚需继续研究。

5 结 语

本文通过理论推导和仿真实验得出结论: 递增实序列被噪声污染后, 其首位位序不变的概率与噪声强度成一种非线性关系, 噪声对序列位序的影响比较大。对于间差一定的序列而言, 当噪声强度一定时, 噪声对序列位序的影响是一定的, 要想提高序列位序的可信度就只有减小噪声。

参 考 文 献

- 1 盛骤, 谢式干, 潘承毅, 等. 概率论与数理统计. 北京: 高等教育出版社, 1989. 12 ~ 13
- 2 David Castanon, Simon Streltsov. Optimality of index policies for a sequential sampling problem. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44(1): 145 ~ 148
- 3 D Bertsekas, S Shreve. Stochastic optimal control: Discrete time case. In: Mathematics in Science and Engineering Series. New York: Academic, 1978

(下转第 628 页)

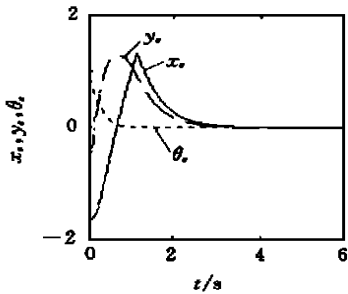


图1 跟踪误差曲线

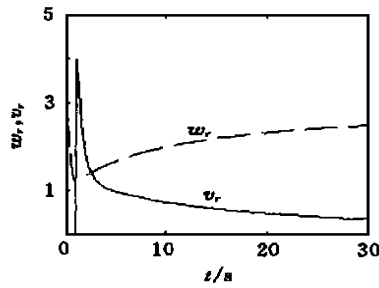


图2 控制变量输出

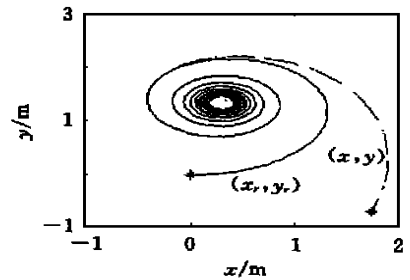


图3 小车在平面上运动轨迹

5 结论

本文将TSM技术应用于基于运动学模型的移动小车的跟踪控制,使移动小车能在有限时间内完全跟踪转速不为零的期望轨迹。该方法适用于对运动小车匀/变速旋转运动的跟踪控制,并可推广到基于动力学模型的移动小车的跟踪控制。

参考文献

- 1 Fierro R, Lewis F I. Control of nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematic into dynamics. In: Proc 33rd IEEE Conf on Decision Control. FL: Lake Buena Vista, 1994. 3475~3480
- 2 Fliess M, Levine J, Martin P *et al.*. Design of trajectory stabilizing feedback for driftless flat systems. In: Proc 3rd European Control Conf. Rome, 1995. 1882~1887
- 3 Jiang Z P, Nijmeijer H. Tracking control of mobile robots: A case study in backstepping. *Automatica*, 1997, 33(7): 1393~1399
- 4 Zak M. Terminal attractors for addressable memory in neural networks. *Physics Lett A*, 1988, 133(1/2): 18~22

- 5 Man Z H, Palinski A P, Wu H R *et al.*. A robust MIMO terminal sliding mode control for rigid robotic manipulators. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(12): 2464~2468
- 6 Yu X H, Man Z H. Multi-input uncertain linear systems with terminal sliding-mode control. *Automatica*, 1998, 34(3): 389~392
- 7 Kanayamar, Kimura Y, Miyazaki F *et al.*. A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. In: Proc IEEE Int Conf on Robotics and Automation. Cincinnati Ohio 1990. 384~389

作者简介

李世华 男,1975年生。1998年在东南大学自动化研究所获工学硕士学位,现为东南大学自动控制系博士研究生。主要研究方向为机器人控制,系统辨识,智能控制。

田玉平 男,1964年生。1986年于清华大学自动化系获工学学士学位,1991年于莫斯科动力学院获自动控制专业哲学博士学位,1996年获俄罗斯技术科学博士学位,现为东南大学自动控制系教授,博士生导师。目前研究方向为复杂系统控制理论及应用,鲁棒控制,混沌控制,机器人控制等。

(上接第622页)

作者简介

熊海林 男,1965年生。1994年于第二炮兵工程学院自动控制工程系获工学硕士学位,现为该校博士研究生。研究方向为导弹控制系统的设计与仿真。

邓方林 男,1937年生。1962年毕业于西北工业大学

弹控制系,现为第二炮兵工程学院301教研室教授,博士生导师。研究方向为控制理论与系统仿真。

刘洁瑜 女,1970年生。1996年于第二炮兵工程学院自动控制工程系获工学硕士学位,现为该校讲师。主要从事导弹控制系统研究与教学工作。