

不确定离散广义系统因果性的鲁棒控制*

原忠虎 王海波 张庆灵 James Lam
(沈阳大学信息工程学院 110044) (东北大学理学院) (香港大学机械工程系)

摘要 讨论不确定离散广义系统的因果性鲁棒控制问题。对不改变原系统正则性的任意扰动, 给出并证明了使闭环系统保持因果性的充要条件。最后举例证明了所给出的主要结果。

关键词 离散广义系统, 因果性, Y -能控, 最小奇异值

分类号 TP 13

Causality Robust Control of Uncertain Discrete-time Singular Systems

Yuan Zhonghu Wang Haibo, Zhang Qingling James Lam
(Shenyang University) (Northeastern University) (University of Hong Kong)

Abstract The solvability problem of robust non-causality elimination is discussed by using feedback control. Minimum singular value invariability for restricted equivalent discrete-time singular systems is proved. A necessary and sufficient condition for non-causality elimination is given. Some examples illustrate the results.

Key words discrete-time singular systems, causality, Y -controllability, minimum singular value

1 引言

随着广义系统研究的日益深化, 离散广义系统也得到了相应的重视与研究, 其中研究的基本问题是离散广义系统的因果性问题。通常具有非因果性的离散广义系统被认为在物理上是无法实现的, 因此找到一种通过反馈控制来消除离散广义系统非因果性的方法, 无论是在理论上还是在应用中都具有重要意义。

本文主要研究离散广义系统的因果性鲁棒控制问题。通过定义离散广义系统的 RNEF (Robust Non-causality Elimination by Feedback) 可解性, 对不改变原系统正则性的任意扰动, 给出并证明了离散广义系统存在反馈控制使闭环系统保持具有因果性的等价条件, 同时考虑了输出反馈控制的情况。

2 准备知识

考虑如下离散广义系统

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (1)$$

$$y(k) = Cx(k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

其中, $x(k) \in R^n, u(k) \in R^m, y(k) \in R^r; E, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}, C \in R^{r \times n}, \text{rank } E = q < n$ 。系统(1)是正则的, 即矩阵 $(\lambda E - A)$ 的行列式不恒等于零。则存在两个正交矩阵 $P, Q \in R^{n \times n}$, 使系统(1)受限等价于系统

$$\begin{cases} Dx_1(k+1) = \\ A_{11}x_1(k) + A_{12}x_2(k) + B_1u(k) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} y_1(k) = C_1x_1(k) \\ 0 = A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + B_2u(k) \\ y_2(k) = C_2x_2(k) \end{cases} \quad (4)$$

当系统(1)存在扰动时(本文只考虑 E 不变, A 有扰动的情况), 记为

* 1999-10-08 收稿, 2000-01-11 修回

$$\begin{cases} Ex(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k), \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5)$$

由于目前只考虑正则的广义系统, 故假设 $\Delta A R^{n \times n}$ 是不改变原系统正则性的扰动矩阵, 即满足

$$\det[\lambda E - (A + \Delta A)] \neq 0$$

与连续情况平行^[1], 不难得到如下结果:

引理 1 下列条件是等价的:

1) 系统(1) 是 Y -能控的;

$$2) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & E & 0 \\ E & A & B \end{bmatrix} = n + \text{rank} E$$

$$3) \quad \text{rank} [A_{22} \quad B_2] = n - \text{rank} E$$

4) 存在一个反馈矩阵 K_2 , 使矩阵 $[A_{22} + B_2 K_2]$

可逆。

定义 1 称系统(1) 是向后递推子系统完全能控的, 如果系统(1) 满足

$$\text{rank} [E \quad B] = n$$

定义 2 称系统(1) 是向后递推子系统完全能观的, 如果系统(1) 满足

$$\text{rank} [E^T \quad C^T]^T = n$$

引理 2 系统(1) 的向后递推子系统完全能控的充要条件是式(4) 中的 B_2 行满秩。

引理 3 系统(1) 的向后递推子系统完全能观的充要条件是式(4) 中的 C_2 列满秩。

引理 4 正交矩阵 P 和 Q 的选择不影响 A_{22} 的奇异值。

证明 记

$$P = (P_1^T \quad P_2^T)^T, \quad Q = (Q_1 \quad Q_2)$$

其中, $P_1^T, Q_1 \in R^{n \times q}; P_2^T, Q_2 \in R^{n \times (n-q)}; \text{rank} E = q$ 。

根据已知

$$PEQ = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad PAQ = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

可知

$$E = P_1^T D Q_1^T, \quad A_{22} = P_2 A Q_2$$

$$P^T P = P P^T = I, \quad P_1^T P_1 + P_2^T P_2 = I$$

$$P_1 P_1^T = I, \quad P_2 P_2^T = I$$

$$Q^T Q = Q Q^T = I, \quad Q_1 Q_1^T + Q_2 Q_2^T = I$$

$$Q_1^T Q_1 = I, \quad Q_2^T Q_2 = I$$

记 E^+ 为 E 的广义逆, 由文献[2] 知 $E^+ = Q_1 D^{-1} P_1$ 唯一, 则有

$$P_2^T P_2 = I - P_1^T P_1 =$$

$$I - P_1^T D Q_1^T Q_1 D^{-1} P_1 = I - E E^+$$

同理, $Q_2 Q_2^T = I - E^+ E$ 。由奇异值的定义知

$$\sigma(A_{22}) = \lambda^{1/2} (Q_2^T A^T P_2^T P_2 A Q_2)$$

根据特征值的解法, 有

$$\begin{cases} \lambda I - Q_2^T A^T P_2^T P_2 A Q_2 = 0 \\ |\lambda I - Q_2^T A^T (I - E E^+) A Q_2| = 0 \end{cases} \quad (6)$$

则方程(6) 的解为如下方程的解, 即

$$|Q_2 (\lambda I - Q_2^T A^T (I - E E^+) A Q_2) Q V^T| = 0 \quad (7)$$

$$|\lambda Q_2 Q_2^T - Q_2 Q_2^T A^T (I - E E^+) A Q_2 Q_2^T| = 0 \quad (8)$$

$$|\lambda (I - E^+ E) - (I - E^+ E) A^T \times \\ (I - E E^+) A (I - E^+ E)| = 0 \quad (9)$$

由 E^+ 唯一被 E 所决定可知, 方程(8) 中 λ 与 P 和 Q 无关, 故方程(7) 的解 λ 也与 P 和 Q 无关。

综上所述, 正交矩阵 P 和 Q 的选择不影响 A_{22} 的奇异值。(证毕)

记 $\sigma_{\min}(A_{22})$ 为 A_{22} 的最小奇异值, 根据引理 1, 由于 $\sigma_{\min}(A_{22})$ 是系统(1) 固有的特征, 可用 $\sigma_{\min}(A_{22})$ 作为刻画系统具有消除非因果性能力的鲁棒性指标。则 $\sigma_{\min}(A_{22})$ 可作为一个数值来刻画系统(1) 的因果性程度。

定义 3 将 $\sigma_{\min}(A_{22})$ 称为系统(1) 的因果裕度。

定义 4 称系统(1) 的因果裕度可以任意配置, 是指对于任给的非负数 a , 都可找到一个状态反馈(或输出反馈) $u(k) = Kx(k)$ (或 $u(k) = Fy(k)$), 使系统(1) 的闭环系统的因果裕度等于 a 。

众所周知, Y -能控表达的是确定离散广义系统的概念, 当系统具有不确定性时, 我们给出平行的新概念。

定义 5 称系统(1) 是 RNEF 可解的, 如果对任给的扰动矩阵 ΔA , 存在一个状态(输出) 反馈矩阵使系统(5) 的闭环系统具有因果性。

引理 5 在状态反馈下, 系统(1) 是 RNEF 可解的等价于存在一个状态反馈矩阵 K_2 , 使

$$\sigma_{\min}(A_{22} + \Delta A_{22} + B_2 K_2) > 0 \quad (10)$$

也等价于系统(1) 的因果裕度在状态反馈下可以任意配置。

证明 由引理 1 及定义 5 知, 系统(1) 是 RNEF 可解的等价于对于任意给定的 ΔA_{22} , 都可找到一个状态反馈矩阵 K_2 , 使矩阵 $[A_{22} + \Delta A_{22} B_2 K_2]$ 可逆。又等价于可以找到一个状态反馈矩阵 K_2 , 使式(10) 成立。因为 ΔA_{22} 是任意允许扰动矩阵, 根据定义 4, 容易推出式(10) 等价于系统(1) 的因果裕度在状态反馈下可以任意配置。(证毕)

引理 6 在输出反馈下, 系统(1) 是 RNEF 可解的等价于可以找到一个输出反馈矩阵 F_2 , 使

$$\sigma_{\min}(A_{22} + \Delta A_{22} + B_2 F_2 C_2) > 0$$

也等价于系统(1) 的因果裕度在输出反馈下可以任意配置。

3 主要结果

定理 1 系统 (1) 在状态反馈下是 RNEF 可解的充要条件是

$$\text{rank}[E \ B] = n$$

即式 (4) 中的 B_2 行满秩。

证明 根据引理 5, 只需证系统 (1) 的因果裕度在状态反馈下可以任意配置的充要条件是 B_2 行满秩即可。

充分性: 存在两个正交矩阵 U 和 V , 使 $UA_{22}V = A_{22}$ 为一对角矩阵, 对应地记 $UB_2 = B_2, K_2V = K_2$ 。则根据奇异值的性质^[2], 有

$$\sigma_{\min}(A_{22} + B_2K_2) = \sigma_{\min}(A_{22} + B_2K_2)$$

由于 B_2 行满秩, 故可找到一个反馈矩阵

$$K_2 = (B_2)^T [B_2(B_2)^T]^{-1}S$$

其中 S 为一对角矩阵。使 B_2K_2 为一对角矩阵且对角线上的元素均与 K_2 有关, 则 $(A_{22} + B_2K_2)$ 也为一对角矩阵且对角线上的元素均与 K_2 有关。所以 $\sigma_{\min}(A_{22} + B_2K_2)$ 可任意配置, 等价于 $\sigma_{\min}(A_{22} + B_2K_2)$ 可任意配置, 即系统 (1) 的因果裕度可以任意配置。

必要性: 根据奇异值的性质^[3], 有

$$\sigma_{\min}(A_{22} + B_2K_2) = \sigma_{n-q}(A_{22} + B_2K_2)$$

$$\sigma(A_{22}) + \sigma_{n-q}(B_2K_2)$$

根据极分解的性质^[3], 存在非负定矩阵 $F \in R^{(n-q) \times (n-q)}$ 与行酉矩阵 $G \in R^{(n-q) \times r}$ 使 $B_2 = FG$, 则有

$$\sigma_{n-q}(B_2K_2) = \sigma_1(GK_2)\sigma_{n-q}(F)$$

如果 B_2 非行满秩, 有 $\det F = 0$, 则 $\sigma_{n-q}(F) = \sigma_{\min}(F) = 0$, 故

$$\sigma_{\min}(A_{22} + B_2K_2)$$

$$\sigma(A_{22}) + 0 \leq \sigma_1(GK_2)\sigma_{n-q}(F)$$

与系统 (1) 的因果裕度可任意配置矛盾, 故 B_2 行满秩。(证毕)

以上的反馈均为状态反馈。如果取输出反馈 $u(k) = Ky(k)$, 则有如下定理:

定理 2 系统 (1) 在输出反馈下是 RNEF 可解的充要条件是

$$\text{rank}[E \ B] = \text{rank}[E^T \ C^T] = n$$

即式 (4) 中的 B_2 行满秩且式 (4) 中的 C_2 列满秩。

证明略。

定理 1 说明在状态反馈下系统 (1) 是 RNEF 可解的, 等价于系统的向后递推子系统完全能控。

定理 2 说明在输出反馈下系统 (1) 是 RNEF 可

解的, 等价于系统的向后递推子系统完全能控且完全能观。

4 例子

例 1 设离散广义系统 (1) 中矩阵为

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中

$$\text{rank}(E) = 1$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由 $\text{rank}(B_2 \ A_{22}) = 3$, $\text{rank}(B_2) = 2 < 3$ 可知该系统 Y -能控, 但不是向后递推子系统完全能控的。

扰动矩阵为

$$\Delta A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & a_1 & a_2 & a_3 \\ x_6 & a_4 & a_5 & a_6 \\ x_7 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

其中

$$\Delta A_{22} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

设 $K = (K_1 \ K_2)$, $K_2 = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \\ k_7 & k_8 & k_9 \end{bmatrix}$

得

$$\text{rank}(A_{22} + \Delta A_{22} + B_2K_2) =$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 + a_1 + k_1 & a_2 + k_2 & a_3 + k_3 \\ a_4 + 3k_4 & 2 + a_5 + 3k_5 & a_6 + 3k_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 3$$

对于任意 K 都成立, 即带有扰动矩阵 ΔA 的系统 (1) 是不可能通过状态反馈来消除非因果性的。

例 2 设离散广义系统 (1) 中矩阵为

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

其中

$$\text{rank}(E) = 1$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

由 $\text{rank}(B_2 \ A_{22}) = 3$, $\text{rank}(B_2) = 3$ 可知该系统 Y -能控且向后递推子系统能控。对于扰动

$$\Delta A = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ x^5 & a_1 & a_2 & a_3 \\ x^6 & a_4 & a_5 & a_6 \\ x^7 & a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$$

其中

$$\Delta A_{22} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$$

设 $K = (K_1 \ K_2)$, $K_2 = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \\ k_7 & k_8 & k_9 \end{bmatrix}$

总能找到 K , 使

$$\text{rank}(A_{22} + \Delta A_{22} + B_2 K_2) =$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 + a_1 + k_1 & a_2 + k_2 \\ a_4 + 3k_4 & 2 + a_5 + 3k_5 \\ a_7 + 4k_7 & a_8 + 4k_8 \\ a_3 + k_3 \\ a_6 + 3k_6 \\ 3 + a_9 + 4k_9 \end{bmatrix} = 3$$

成立, 即带有任意扰动矩阵 ΔA 的系统(1) 是可以通过状态反馈来消除非因果性的。

例 1 说明 Y -能控的系统不一定是 RNEF 可解的, 例 2 则说明快子系统能控的系统一定是 RNEF 可解的。这两个例子是对本文主要结果定理 1 的简要说明和解释。

5 结 语

本文使用最小奇异值作为因果裕度来处理不确定离散广义系统的因果性控制问题。对不改变原系统正则性的任意扰动, 给出并证明了使闭环系统保持因果性的充要条件, 为研究具有非因果性的系统的鲁棒控制问题提供了可能性。

参 考 文 献

- 1 Dai L. Singular control systems——Lecture notes in control and information science. Berlin: Springer-Verlag, 1989
- 2 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数. 北京: 科学出版社, 1984
- 3 王伯英. 控制不等式基础. 北京: 北京师范大学出版社, 1990

作 者 简 介

原忠虎 男, 1962 年生。1994 年于东北大学获博士学位, 现为沈阳大学信息工程学院院长。研究方向为广义分散控制系统, 计算机集成制造系统。

王海波 男, 1971 年生。香港大学自动控制系博士研究生。研究方向为鲁棒控制。

张庆灵 男, 1956 年生。1995 年于东北大学获博士学位, 现为东北大学理学院院长, 教授, 博士生导师。研究方向为鲁棒控制, 广义分散控制系统。

James Lam 男, 1960 年生。1989 年于剑桥大学获博士学位, 现为香港大学教授。研究方向为鲁棒控制。