

# 基于 LMI 的模糊控制器设计方法\*

谢振华

范训礼 曲建岭 王磊

耿昌茂

(海军航空工程学院青岛分院 266041) (西北工业大学自动控制系) (海军航空工程学院青岛分院)

**摘要** 针对 T-S 模糊模型, 提出同时满足稳定条件和控制受约束的模糊控制器的线性矩阵不等式设计方法。将稳定性及控制约束转化为满足 Lyapunov 稳定的凸优化问题, 并提出了基于 LMI 的模糊系统控制器设计和稳定性分析的系统框架。倒立摆的模糊控制器设计实例表明了设计方法的有效性。

**关键词** T-S 模糊模型, 线性矩阵不等式, Lyapunov 稳定, 模糊控制器设计

**分类号** TP 13

## Fuzzy Controller Design via LMI Approach

Xie Zhenhua

Fan Xunli, Qu Jianling, Wang Lei

Geng Changmao

(Navy Aviation Engineering College) (Northwestern Polytechnical University) (Navy Aviation Engineering College)

**Abstract** A system framework of fuzzy controller design and stability analysis of closed-loop T-S fuzzy systems via linear matrix inequality (LMI) is presented. The stable conditions are reduced to the problem of finding a Lyapunov function for a set of LMIs. The problem of constraints on the control input can also be solved by convex programming techniques for LMIs. The example for a fuzzy controller of the inverted pendulum demonstrates the efficiency of this approach.

**Key words** Takagi-Sugeno fuzzy model, linear matrix inequality, Lyapunov stability, fuzzy controller design

## 1 引言

模糊控制系统的稳定性分析和设计方法是模糊控制理论最重要的研究课题。近年来国内外许多学者对此进行研究, 取得了一些有益的成果<sup>[1,2]</sup>。文献[1, 3, 4] 基于 Lyapunov 稳定性理论对 T-S 模糊系统<sup>[5]</sup> 进行稳定性分析, 给出了一个判定系统全局渐近稳定的充分条件。该稳定条件需要求解一个共同的正定矩阵  $P$ , 以满足 Lyapunov 矩阵不等式族。但是关于  $P$  的求解问题一直没有较好的解决方法, 使其应用受到限制。

线性矩阵不等式(LMI) 方法是一种凸优化方法, 由于内点算法的提出, 使其成为解决线性矩阵不等式问题的强有力工具, 并在控制理论中得到广泛

的应用和发展<sup>[6]</sup>。文献[7] 在[1, 3] 的基础上首次提出利用 LMI 方法求解正定阵  $P$ ; [2] 利用二次稳定理论、 $H_\infty$  理论和 LMI 方法研究一类不确定性非线性系统的鲁棒稳定性问题, 但未利用这些方法进行控制器设计。

本文针对非线性连续系统的 T-S 模糊模型, 提出保证模糊系统全局稳定的基于 LMI 的模糊控制器设计方法, 并在控制输入存在约束的条件下, 将稳定性和控制约束问题转化为 LMI 凸优化问题。应用这种方法, 可将稳定性和控制系统其它性能指标约束下的模糊控制器的设计, 统一到一系列等价的 LMI 凸优化问题, 整个设计过程直观自然, 为建立模糊控制理论的系统的设计方法奠定了基础。倒立摆的设计仿真证明了本文方法是方便而有效的。

\* 国家重点基础研究发展规划项目(G 1998030417)

### 2 T-S 模糊模型

T-S 模糊模型是由一组 If-then 模糊规则来描述的非线性系统<sup>[5]</sup>, 每条规则代表一个子系统. 令  $R_i$  表示模糊系统的第  $i$  条规则, 则 T-S 模型描述如下

$$R_i: \text{If } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_p(t) \text{ is } M_{ip} \\ \text{then } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ i = 1, 2, \dots, r \quad (1)$$

其中,  $z_1(t) \sim z_p(t)$  为条件变量,  $M_{ij}$  为模糊集合,  $r$  为模糊规则个数,  $x(t) \in R^n$  为系统状态向量,  $u(t) \in R^m$  为控制输入向量. 给定  $(x(t), u(t))$ , 则模糊系统的输出为各子系统输出的加权平均, 即

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2)$$

其中

$$z(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_p(t)] \\ h_i(z(t)) = w_i(z(t)) \left/ \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \right. \quad 0$$

$$\text{且 } \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \quad w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t))$$

其中  $M_{ij}(z_j(t))$  表示  $z_j(t)$  属于模糊集合  $M_{ij}$  的隶属度.

**注 1**  $z(t)$  可指定为系统状态向量或其它向量,  $u(t) = 0$  时为自由系统. 本文取  $z(t) = x(t)$ , 并且仅讨论连续系统的情况(离散系统有类似的表示).

### 3 基于 LMI 的模糊控制器设计及稳定性分析

许多实际的电学、机械和混沌系统等非线性系统都可由上述 T-S 模型表示<sup>[1-5,7]</sup>. 对于这类模糊系统, 利用并行分布补偿原理<sup>[7]</sup> 对系统(1) 的每个子系统分别设计局部控制器, 各局部控制器共享(1)的前提条件. 对于系统(1), 其模糊控制器为

$$R_i: \text{If } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_p(t) \text{ is } M_{ip} \\ \text{then } u(t) = - F_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3)$$

模糊控制器为各控制器的线性组合, 即

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t) \quad (4)$$

模糊控制器的设计就是求解反馈增益  $F_i$  使系统(2) 稳定. 将式(4) 代入式(2) 得闭环系统

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i - B_i F_j) x(t) =$$

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) G_{ii} x(t) + \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} x(t) \quad (5)$$

$$\text{其中 } G_{ij} = A_i - B_i F_j$$

**定理 1** 对于系统(2) 的自由系统(当  $u(t) = 0$  时), 如果存在一个共同的正定矩阵  $P$ , 满足

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (6)$$

则  $\forall t$ , 此自由系统全局渐近稳定.

定理 1 为一充分条件, 当  $r = 1$  时即为 Lyapunov 稳定定理. 其证明过程只需取 Lyapunov 函数为  $V = x^T(t) P x(t)$  即可得证. 将系统(5) 中的  $G_{ij}$  代入式(6), 可直接得到闭环系统稳定的充分条件, 并求得反馈阵  $F_i$ , 但这种方法存在一定的保守性. 下面的定理可使保守性得以减小.

**定理 2** 对于系统(5),  $\forall i, j$ , 如果存在一个共同的矩阵  $P$  和  $Q$ , 满足

$$P > 0, \quad Q < 0 \quad (7)$$

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + Q < 0 \quad (8)$$

$$\frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} P + P \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} - Q < 0, \quad i < j \quad (9)$$

则  $\forall t$ , 系统(5) 全局渐近稳定.

**证明** 取 Lyapunov 函数为

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$$

其中  $P > 0$ , 则  $V(x(t)) > 0$ , 且

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t)$$

将式(5) 代入上式, 当式(7) ~ (9) 成立时, 总有

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) x^T(t) (G_{ii}^T P + P G_{ii}) x(t) + \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T(t) \left[ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \right] x(t) \\ \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) x^T(t) (G_{ii}^T P + P G_{ii} + Q) x(t) < 0$$

(证毕)

控制器的设计变成了寻找  $P, Q$  和  $F_i$  满足式(7) ~ (9) 的问题. 根据广义特征值最小化问题, 利用 Shur 补引理<sup>[6]</sup>, 这一问题可转化为如下关于  $X, Y$  及  $M_i$  的 LMI 可行性问题, 即

$$X > 0, \quad Y < 0 \quad (10)$$

$$X A_i^T + A_i X + Y - M_i^T B_i^T - B_i M_i < 0 \quad (11)$$

$$X A_i^T + A_i X + X A_j^T + A_j X - 2Y - M_j^T B_j^T -$$

$$B_i M_j - M_i^T B_j^T - B_j M_i = 0, \quad i < j \quad (12)$$

其中  $X = P^{-1}$ ,  $M_i = F_i X$ ,  $Y = X Q X$

以上 LMI 可行性问题有解, 则系统(5) 全局渐近稳定, 且

$$P = X^{-1}, \quad Q = P Y P, \quad F_i = M_i X^{-1}$$

这样, 模糊控制系统的稳定性分析和控制器设计问题就转化为 LMI 可行性问题。由于内点算法的提出, 这种凸优化问题可方便地通过 LMI-lab 软件工具来求解。因此, 寻求满足稳定条件的共同矩阵  $P$ ,  $Q$  和反馈阵  $F_i$  就变得十分简单。

在实际控制系统中, 控制输入的大小是有限制的, 为此我们参照 LMI 方法对控制输入存在约束条件时的处理方法<sup>[6]</sup>, 对模糊控制输入进行了限幅处理。假定系统初始条件  $x(0)$  已知, 对于约束

$u(t) \leq \mu$ , 如果存在矩阵  $X, Y$  及  $M_i$  (定义同前) 满足式(10) ~ (12) 及下列线性矩阵不等式族

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \leq 0 \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} X & M_i^T \\ M_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (14)$$

则  $\forall t$ , 系统(5) 全局渐近稳定, 且控制输入满足约束  $u(t) \leq \mu$ 。同前所述, 可得  $P, Q$  和  $F_i$ 。

同理, 还可得到保证系统稳定并具一定衰减率、系统观测输出存在约束等多种设计性能指标的等价 LMI 问题。

## 4 倒立摆算例分析

单级倒立摆的非线性动力学模型为<sup>[7]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin x_1 - a m l x_2^2 \sin x_1 \cos x_1 - a u \cos x_1}{l(4/3 - a m \cos^2 x_1)} \end{aligned} \quad (15)$$

其中,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  为重力加速度,  $a = 1/(M + m)$ ,  $M = 1.0 \text{ kg}$  为小车重量,  $m = 0.2 \text{ kg}$  为摆杆重量,  $l = 0.3 \text{ m}$  为摆杆的长度,  $x_1$  和  $x_2$  分别为摆杆与垂直方向的夹角和摆杆的角速度,  $u$  为作用在小车上的力(单位为 N)。

控制目标是设计一模糊控制器, 使摆杆不倒并达到稳定( $x = 0$ ),  $x_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ , 小车位移不受限制。假设  $x_2 = 0$ , 注意到  $x_1 = \pm \pi/2$  时系统不可控, 则系统(15) 可由如下 T-S 模型近似。

$R_1$ : If  $x_1(t)$  is about 0

$$\text{then } \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t) \quad (16)$$

$R_2$ : If  $x_1(t)$  is about  $\pm \pi/2$ ,  $|x_1| < \pi/2$

$$\text{then } \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t) \quad (17)$$

其中对应规则中  $x_1(t)$  的隶属函数如图 1 所示,  $\mu_{R_i}(x_1)$  表示  $x_1$  属于规则  $R_i$  的隶属度值。且系统矩阵为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix}, \quad \beta = \cos(88^\circ)$$

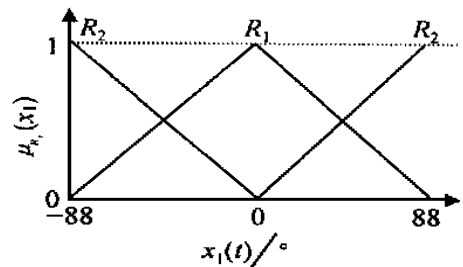


图 1 模糊隶属函数定义

### 4.1 不加控制限制约束时的控制器及其鲁棒性分析

应用本文提出的方法求解式(10) ~ (12), 可得

$$P = \begin{bmatrix} 90.3352 & 22.8809 \\ 22.8809 & 6.0643 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 247.7 & -946.2 \\ 1067.5 & 15.3 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = [-150.1732 \quad -35.8623]$$

$$F_2 = [-314.6358 \quad -75.3983]$$

模糊控制器为

$$u(t) = -h_1 F_1 x - h_2 F_2 x \quad (18)$$

由上节给出的结论,  $P, Q$  存在, 则控制器(18) 保证式(16) 和(17) 组成的闭环系统全局渐近稳定, 从而非线性系统(15) 稳定。将设计结果代入定理 2, 可以验证式(7) ~ (9) 均成立。

为了验证设计方法的有效性和控制器的鲁棒性, 将控制器(18) 应用于原非线性系统(15) 进行仿真, 结果如图 2 所示。图 2(a) 中实线为系统参数不变时的闭环状态响应(初始条件  $x_1 = 10^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 65^\circ; 85^\circ; x_2 = 0$ ), 对应  $x_1$  的 5 种初始条件, 原始参数分别改变为  $M = 3.0 \text{ kg}, m = 0.5 \text{ kg}, l = 0.5 \text{ m}, M = 0.5 \text{ kg}, m = 0.1 \text{ kg}$ ; 点线为参数改变后的状态响应。

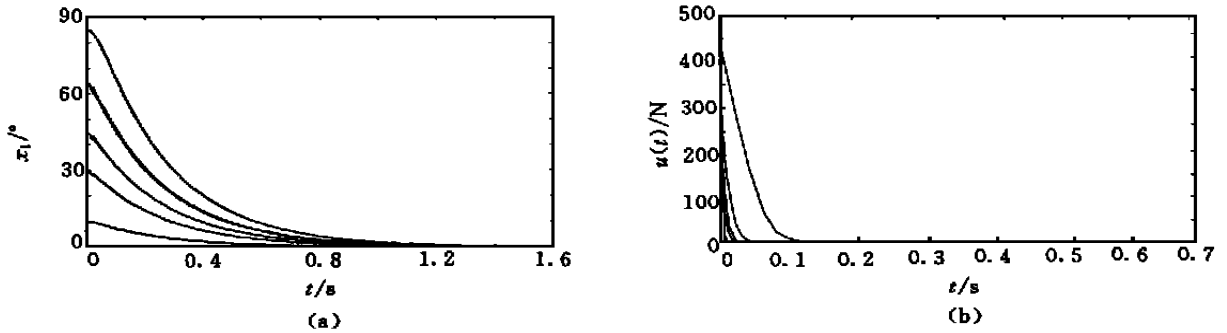


图2 不加控制约束时闭环系统的状态响应和对应的控制量

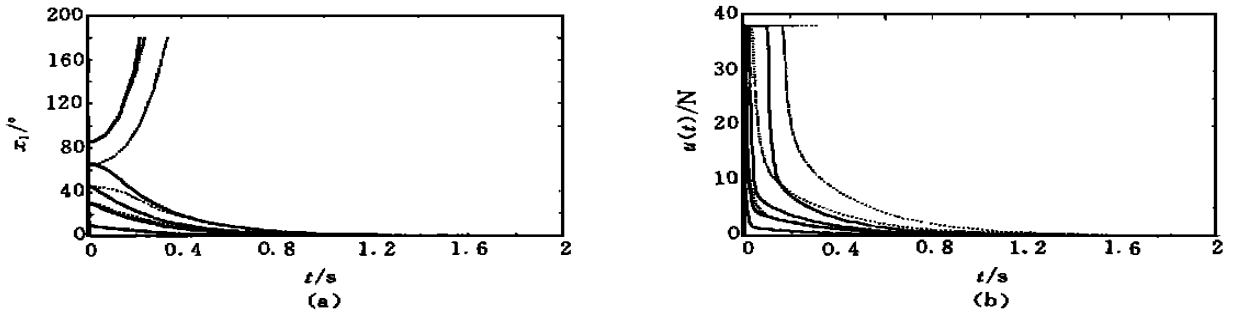
(a)  $x_1$  的闭环状态响应 (b) 对应的控制量

图3 加控制约束时闭环系统的状态响应和对应的控制量

(a)  $x_1$  的闭环状态响应 (b) 对应的控制量

( $x_2$  的响应与其类似)。图 2(b) 为对应的控制量。由于没有加限幅约束, 并且系统初始条件较平衡状态变化大, 故控制量变化较大。另外, 系统固有参数(如  $M$ ,  $m$  和  $l$  等) 也决定了控制量的大小。结果表明, 在初始条件为  $x_1 \in [-88^\circ, 88^\circ]$ ,  $x_2 = 0$  时, 控制器(18) 均可使非线性系统稳定, 控制器鲁棒性较强。

#### 4.2 加控制限制约束时的控制器及其鲁棒性分析

假设  $u(t) \leq \mu = 38$ ,  $x(0) = [10^\circ \ 0]^\top$ , 对式(10) ~ (14) 进行求解, 可得

$$P = \begin{bmatrix} 32.5536 & 8.2552 \\ 8.2552 & 2.0976 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.9016 & -0.0179 \\ 0.4790 & 0.0624 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = [-118.8437 \quad -28.9474]$$

$$F_2 = [-215.8999 \quad -54.5688]$$

同样在原系统进行仿真,  $x_1$  的初始条件同上, 闭环状态响应如图 3(a) 所示, 控制量如图 3(b) 所示。其中实线为系统参数不变时的闭环状态响应; 点线为系统参数改变为  $M = 3.0\text{kg}$  时的闭环响应。另外, 我们还改变了多组参数进行仿真, 限于篇幅, 本文只给出以上部分结果。结果表明:

1) 初始条件和控制量约束选取必须相互配合,

初值大而控制约束不加大, 可能无解或系统不稳定。在此例的初始条件下, 如取  $\mu = 37$ , 问题不可解; 而当初值较大时(如  $x_1 = 85^\circ$ ), 系统不稳定。

2) 系统参数及初始条件变化较大时, 模糊控制系统仍能在较大范围内达到稳定。在此例中, 稳定范围可达初值为  $\pm 60^\circ$  以内, 而设计参数为  $10^\circ$ 。

3) 从参数变化对系统影响的结果看, 小车的质量对系统的影响最大。增加模糊模型的规则, 系统的性能将会更好, 而规则的增加仅增加几个线性矩阵不等式, 对此应用 LMI 工具求解较为容易。

## 5 结 论

本文研究了模糊控制器设计及稳定性分析, 得到一个稳定性充分条件, 将此充分条件转化为求解 LMI 凸优化问题, 并针对控制输入存在约束的情况建立了 LMI 等价问题。上述研究, 将模糊控制器设计、稳定性分析以及控制系统其它性能要求归结为求解一系列 LMI 凸优化问题, 建立了一个统一的框架。在这一框架中, 控制器的设计和稳定性分析变得十分自然直观。通过倒立摆系统的控制器设计和仿真, 验证了本文方法的方便有效性, 控制器结构简单、规则少、鲁棒性强。

(下转第 556 页)

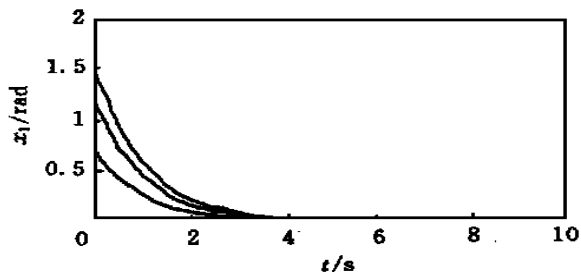


图3 模糊双曲正切模型中  $x_1(t)$  的响应曲线

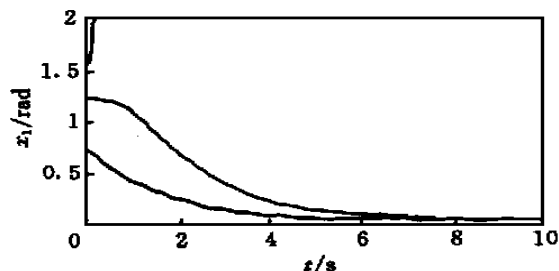


图4 倒立摆系统中  $x_1(t)$  的响应曲线

型,且没有稳态误差。由于模糊双曲正切模型与真实对象之间存在差别, $H$  控制器只能局部镇定真

实对象,且存在稳态误差。

## 参考文献

- 1 S G Cao, N W Rees, G Feng. Analysis and design for a class of complex control systems. Part : Fuzzy controller design. Automatica, 1997, 33 (6): 1029 ~ 1039
- 2 张化光, 全永兵. 一类基于状态空间模型的模糊控制器. 自动化学报, 2000, 26(6): 729 ~ 735
- 3 E Kaszkurewicz, A Bhaya. Robust stability and diagonal Lyapunov functions. SIAM J on Matrix Analysis and Applications, 1993, 14(2): 508 ~ 520

## 作者简介

全永兵 男, 1977年生。1996年于华中理工大学获学士学位, 东北大学信息科学与工程学院博士研究生。主要研究方向为模糊控制理论与应用等。

张化光 男, 1959年生。东北大学电气自动化研究所所长, 教授, 博士生导师。研究领域为复杂系统的模糊自适应控制, 非线性控制, 混沌控制等理论及其在工业过程中的应用。

(上接第552页)

## 参考文献

- 1 K Tanaka, M Sugeno. Stability analysis and design of fuzzy control systems. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45(2): 135 ~ 156
- 2 K Tanaka, T Ikeda, Hua O Wang. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability,  $H$  control theory and linear matrix inequalities. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1996, 4(1): 1 ~ 13
- 3 K Tanaka, M Sano. Fuzzy stable criterion of a class of nonlinear systems. Information Sciences, 1993, 71(1): 3 ~ 26
- 4 K Tanaka, M Sano. A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1994, 2(2): 119 ~ 134
- 5 T Takagi, M Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. IEEE Trans on Syst, Man and Cybern, 1985, 15(1): 116 ~ 132
- 6 Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron. Linear matrix inequalities in system and control theory.

Philadelphia: SIAM, 1994

- 7 Hua O Wang, K Tanaka, M Griffin. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1996, 4(1): 14 ~ 23

## 作者简介

谢振华 男, 1965年生。海军航空工程学院讲师, 西北工业大学自动控制系博士研究生。研究方向为模糊控制, 鲁棒控制。

范训礼 男, 1970年生。西北工业大学自动控制系博士研究生。研究方向为鲁棒控制, 计算机网络。

曲建岭 男, 1968年生。1998年于西北工业大学获硕士学位, 现为西北工业大学博士研究生。研究方向为智能测量, 模糊控制等。

王磊 男, 1961年生。1985年于西北工业大学获硕士学位, 1993年获德国埃森大学模糊控制专业博士学位, 现为西北工业大学自动控制系教授, 博士生导师。主要研究领域为模糊测量技术, 温度控制等。

耿昌茂 男, 1937年生。1964年毕业于南京航空学院, 现为海军航空工程学院教授。研究方向为飞行控制, 容错控制。