

全局指数收敛的机器人 PD 自适应轨迹跟踪*

陈启军 王月娟 陈辉堂
(同济大学电气工程系 上海 200092)

摘要 针对机器人轨迹跟踪,介绍一种新的 PD 自适应控制算法。该算法是全局按指数收敛的,直接利用期望轨迹,不需要定义虚拟参考轨迹,结构简单,计算量小;并能完全消除模型误差产生的轨迹误差,使有界不确定性干扰产生的轨迹误差任意小。两关节直接驱动机器人的实验研究证明了所提出算法的有效性。

关键词 轨迹跟踪,PD 自适应控制,全局指数收敛

分类号 TP 24

Globally Exponentially Convergent PD Adaptive Trajectory Tracking for Robotic Manipulators

Chen Qijun, Wang Yuejuan, Chen Huitang
(Tongji University)

Abstract A novel PD adaptive trajectory tracking controller is presented. This control law utilizes the desired trajectory instead of virtual reference trajectory and has simple structure. The tracking errors caused by model errors are completely reduced. The tracking errors caused by bounded uncertainly disturbances can be arbitrarily small. Experiment results of two joints direct driven robot demonstrate the effectiveness.

Key words trajectory tracking, PD adaptive controller, globally exponential convergence

1 引言

长期以来,参数不确定性存在时的机器人控制问题,已引起控制理论界的广泛关注。Slotine 等^[1]和 Craig 等^[2]最先提出全局稳定的自适应控制算法,该算法能克服参数不确定性的影响。Sadegh 等^[3~6]对此做了进一步研究,但这些方法基本上是文献[1, 2]工作的继续。Bayard 等^[7]提出另一类自适应控制器,它类似于 PD 加前馈补偿,被称为 PD 自适应控制器。这类控制器直接利用期望轨迹,不需要定义所谓的滑动面,计算更加简单。按照 Bayard 的分析,控制算法仅是局部稳定的。Berghuis^[8]介绍了一种全局稳定的 PD 自适应控制器,但该算法需

要修改哥氏项,并且要求自适应环满足一个复杂的不等式约束。文献[8]并没有讨论控制算法对不确定性干扰的鲁棒性,[7]和[8]提出的方法都不能保证指数收敛。

本文针对机器人轨迹跟踪,提出一种新的 PD 自适应控制算法。主要结论概括如下:1) 控制算法是全局按指数收敛的;2) 只需知道动力学模型结构,计算量小,实现容易;3) 能完全消除模型误差产生的轨迹误差,使有界不确定性干扰产生的轨迹误差任意小。两关节直接驱动机器人的实验研究证明了本文算法的有效性。

2 机器人动力学模型及主要特性

考虑具有 n 个旋转关节的刚性机器人,其动力学模型为

* 国家自然科学基金项目(69685004)

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = \tau \quad (1)$$

式中, $\theta \in R^n$ 为关节角位移矢量, $M(\theta) \in R^{n \times n}$ 为惯性矩阵, $C(\theta, \dot{\theta}) \in R^n$ 表示离心力和哥氏力项, $G(\theta) \in R^n$ 为重力项, $\tau \in R^n$ 为控制力矩。

机器人动力学模型的一些主要特性如下:

- 1) $M(\theta) - 2C(\theta, \dot{\theta})$ 是斜对称阵;
- 2) 矩阵 $C(\cdot)$ 满足可交换性, 即 $C(\theta, v_1)v_2 = C(\theta, v_2)v_1, \forall v_1, v_2 \in R^n$
- 3) 惯性矩阵 $M(\cdot)$ 是对称正定阵;
- 4) 存在正常数 k_c (或 k_{ci}), 使得 $C(x, y), z \leq k_c \|y\| \|z\|, x, y, z \in R^n$

3 PD 自适应控制器

引理 1^[9] 考虑动态系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) \end{cases} \quad (2a)$$

其中, $x_1 \in R^n, x_2 \in R^n$ 。如果存在 Lyapunov 函数

$$V(x_1, x_2) = \eta_3 \|x_1\|^2 + \eta_4 \|x_2\|^2 \quad (2b)$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -\eta_5 \|x_1\|^2 - \eta_6 \|x_2\|^2 + \epsilon \quad (2c)$$

其中, ϵ, η 为正常数。定义 $\delta = \max(\eta_3/\eta_5, \eta_4/\eta_6)$, $r_i = (\delta\epsilon/\eta_i)^{1/2} (i = 1, 2)$, 则对任意初始状态 $x_1(t_0), x_2(t_0)$, 有

$$\begin{cases} x_1 = r_1 + \gamma \exp\left[-\frac{1}{2\delta}(t - t_0)\right] \\ x_2 = r_2 + \gamma \exp\left[-\frac{1}{2\delta}(t - t_0)\right] \end{cases} \quad (2d)$$

其中, γ 为大于 0 的常数, $t \geq t_0$ 。即 $x_1(t), x_2(t)$ 按指数收敛到封闭球 B_{r_1}, B_{r_2} 。 r_1, r_2 分别为 $x_1(t), x_2(t)$ 的球半径。

定理 1 考虑式(1)所示系统, 设计自适应控制律为

$$\begin{aligned} \tau = & -K_p e - K_v \dot{e} + \hat{M}(\theta)\ddot{\theta}_d + \\ & \hat{C}(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_d + \hat{G}(\theta) \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} \hat{M}(\theta)\ddot{\theta}_d + \hat{C}(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_d + \hat{G}(\theta) = \\ Y(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}_d, \theta_d) \hat{P} \end{aligned} \quad (3b)$$

$$\dot{\hat{P}} = -\Psi^{-1} Y^T(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}_d, \theta_d) [f(e) + \dot{e}] \quad (3c)$$

$$f(e) = e/(\alpha + \|e\|) = \beta e$$

$$e = \theta - \theta_d, \quad \dot{e} \in R^n$$

$Y(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}_d, \theta_d) \in R^{n \times m}$ 为已知矩阵, $P \in R^{m \times 1}$ 为未知参数矩阵, $\alpha > 1, \psi > 0$ 。如果期望轨迹速度 $\dot{\theta}_d$ 和期望轨迹加速度 $\ddot{\theta}_d$ 有界, 则可保证 e, \dot{e} 按指数收敛到 0。

证明 由式(1)和(3a), 系统的误差方程为

$$M(\theta)\ddot{e} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{e} + K_p e + K_v \dot{e} = \rho_1 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 = & [\hat{M}(\theta) - M(\theta)]\ddot{\theta}_d + [\hat{C}(\theta, \dot{\theta}) - \\ & C(\theta, \dot{\theta})]\dot{\theta}_d + \hat{G}(\theta) - G(\theta) = \end{aligned}$$

$$Y(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}_d, \theta_d) \tilde{P}$$

定义如下 Lyapunov 函数

$$V(e, \dot{e}, \tilde{P}) = [e^T, \dot{e}^T] Q [e^T, \dot{e}^T]^T + \frac{1}{2} \Psi \tilde{P}^T \tilde{P} \quad (5)$$

其中 $Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} K_p & \beta M \\ \beta M & M \end{bmatrix}$

文献[9]已证明, 如果满足 $\lambda_{\min}(K_p) > \lambda_{\max}(M)$, 则 Q 对称正定。 $\lambda_{\max}(\cdot), \lambda_{\min}(\cdot)$ 分别表示最大、最小特征值。

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T K_v \dot{e} - f(e)^T K_p e - f(e)^T K_v \dot{e} + \\ & e^T M \dot{f}(e) + e^T C(\theta, \dot{\theta}) \dot{f}(e) + \\ & (e^T + f(e)^T) \rho_1 + \Psi \tilde{P}^T \dot{\tilde{P}} \\ \dot{\tilde{P}} = & \hat{P} - \tilde{P} = \tilde{P} = \\ & -\Psi^{-1} Y^T(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}_d, \theta_d) [f(e) + \dot{e}] \end{aligned}$$

所以

$$\dot{V} = -e^T K_v \dot{e} - f(e)^T K_p e - f(e)^T K_v \dot{e} + e^T M \dot{f}(e) + e^T C(\theta, \dot{\theta}) \dot{f}(e)$$

由于

$$\dot{f}(e) = \frac{\dot{e}}{\alpha + \|e\|} - \frac{e \dot{e}^T e}{(\alpha + \|e\|)^2 \|e\|} \quad (6)$$

$$e^T M \dot{f}(e) \leq 2\beta \lambda_{\max}(M) \|e\|^2 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} e^T C(\theta, \dot{\theta}) \dot{f}(e) = \\ e^T C(\theta, \dot{\theta}_d + \dot{e}) \dot{f}(e) \leq \\ \beta \sup(k_{c1} \|\dot{\theta}_d\|) \|e\| \|\dot{e}\| + k_{c2} \|e\|^2 = \\ \beta \gamma_1 \|e\| \|\dot{e}\| + \gamma_2 \|e\|^2 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & (\lambda_{\min}(K_v) - 2\beta \lambda_{\max}(M) - \\ & \gamma_2) \|e\|^2 - \beta \lambda_{\min}(K_p) \|e\|^2 + \\ & \beta (\lambda_{\max}(K_v) + \gamma_1) \|e\| \|\dot{e}\| \end{aligned}$$

定义

$$\gamma_3 = 2\beta \lambda_{\max}(M) + \gamma_2$$

$$\gamma_4 = \lambda_{\max}(K_v) + \gamma_1 \quad \text{http://www.cnki.net}$$

$$\dot{V} = (\lambda_{\min}(K_v) - \gamma_3 - \frac{1}{2}\beta\gamma_4) \dot{e}^2 -$$

$$\beta(\lambda_{\min}(K_p) - \frac{1}{2}\gamma_4) \dot{e}^2 =$$

$$- \varphi \dot{e}^2 - \varrho \dot{e}^2$$

总可以通过选择较大的 K_p, K_v , 以保证 $\varphi > 0$, $\varrho > 0$. 由引理 1, e 和 \dot{e} 按指数收敛到 0, $e = 0, \dot{e} = 0$ 是唯一的平衡点。(证毕)

4 鲁棒性分析

现在考虑有界不确定性干扰 $d(\theta, \dot{\theta}, t)$ 存在时的轨迹跟踪性能. 假定 $d(\theta, \dot{\theta}, t)$ 满足约束

$$d(\theta, \dot{\theta}, t) \leq d_1 + d_2 \|\dot{\theta}\| \quad (8)$$

其中 d_1, d_2 为正常数. 引入有界不确定性干扰 $d(\theta, \dot{\theta}, t)$ 后, 机器人的动力学模型变为

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) + d(\theta, \dot{\theta}, t) = \tau \quad (9)$$

由式(3a)和(9), 系统的误差方程变为

$$\begin{cases} M(\theta)\ddot{e} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{e} + K_p e + K_v \dot{e} = \rho_2 \\ \rho_2 = Y(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \ddot{\theta}_d) \tilde{P} - d(\theta, \dot{\theta}, t) \end{cases} \quad (10)$$

选取与式(5)相同的 Lyapunov 函数, 则有

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T K_v \dot{e} - f(e)^T K_p e - f(e)^T K_v \dot{e} + \\ & e^T M \dot{f}(e) + e^T C(\theta, \dot{\theta}) f(e) + \\ & (e^T + f(e)^T) \rho_2 + \varphi P^T \tilde{P} \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} d(\theta, \dot{\theta}, t) \leq & d_1 + d_2 \|\dot{\theta}\| \\ d_1 + \sup(d_2 \|\dot{\theta}_d\|) + d_2 \|\dot{e}\| = & \gamma_5 + \gamma_6 \|\dot{e}\| \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (\lambda_{\min}(K_v) - 2\beta\gamma_{\max}(M) - \\ & \gamma_2 - \gamma_6) \dot{e}^2 - \beta\lambda_{\min}(K_p) \dot{e}^2 + \\ & \beta(\lambda_{\max}(K_v) + \gamma_1 + \gamma_6) \dot{e} \dot{e} + \\ & \gamma_5 \dot{e} + \beta\gamma_5 \dot{e} \end{aligned}$$

定义

$$\gamma_7 = 2\beta\lambda_{\max}(M) + \gamma_2 + \gamma_6$$

$$\gamma_8 = \lambda_{\max}(K_v) + \gamma_1 + \gamma_6$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \left[\lambda_{\min}(K_v) - \gamma_7 - \frac{1}{2}\beta\gamma_8 \right] \dot{e}^2 - \\ & \beta \left[\lambda_{\min}(K_p) - \frac{1}{2}\gamma_8 \right] \dot{e}^2 + \\ & \gamma_5 \dot{e} + \beta\gamma_5 \dot{e} \end{aligned}$$

总可以取足够大的 K_p, K_v , 以保证

$$\varphi = \lambda_{\min}(K_v) - \gamma_7 - \frac{1}{2}\beta\gamma_8 > 0$$

$$\varrho = \lambda_{\min}(K_p) - \frac{1}{2}\gamma_8 > 0$$

并且下面的不等式成立

$$\begin{aligned} \gamma_5 \dot{e} = & \left[\lambda_{\min}(K_v) - \gamma_7 - \frac{1}{2}\beta\gamma_8 \right] \dot{e}^2 \\ & - \frac{\gamma_5^2}{\lambda_{\min}(K_v) - \gamma_7 - \frac{1}{2}\beta\gamma_8} - \frac{1}{4}\varphi \dot{e}^2 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \gamma_5 \dot{e} = & \left[\lambda_{\min}(K_p) - \frac{1}{2}\gamma_8 \right] \dot{e}^2 \\ & - \frac{\gamma_5^2}{\lambda_{\min}(K_p) - \frac{1}{2}\gamma_8} - \frac{1}{4}\varrho \dot{e}^2 \end{aligned} \quad (12)$$

所以

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{4}\varphi \dot{e}^2 - \frac{1}{4}\beta\varrho \dot{e}^2 + \\ & \frac{\gamma_5^2}{\lambda_{\min}(K_v) - \gamma_7 - \frac{1}{2}\beta\gamma_8} + \\ & \frac{\beta\gamma_5^2}{\lambda_{\min}(K_p) - \frac{1}{2}\gamma_8} \end{aligned}$$

由引理 1, e, \dot{e} 按指数收敛到半径分别为 r_1, r_2 的封闭球. 显然, 通过增大 K_p, K_v 可使球半径任意小.

基于上述分析, 可得如下结论:

1) 式(3)所示的自适应控制算法非常简单. 自适应补偿项的计算直接利用期望轨迹, 不需要定义虚拟参考轨迹. 期望轨迹 $\theta_d, \dot{\theta}_d$ 可以离线计算后放在内存中, 这将大大减少控制算法的在线计算时间.

2) 控制算法没有要求惯量或哥氏项参数缓慢变化, 只需知道机器人模型的结构, 不要求不确定参数满足某种约束或预知不确定性的先验信息, 给控制器实现提供了很大便利.

3) 控制算法是全局指数稳定的, 能完全克服模型不确定性的影响. 对任意初始条件, e, \dot{e} 按指数收敛到 0, 即

$$\begin{cases} \lim_t |e_i(t)| = 0 \\ \lim_t |\dot{e}_i(t)| = 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

4) 在有界不确定性干扰存在的情况下, 对任意初始条件, e, \dot{e} 按指数收敛到半径分别为 r_1, r_2 的封闭球, 即

$$\begin{cases} \lim_t |e_i(t)| \leq r_1 \\ \lim_t |\dot{e}_i(t)| \leq r_2 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

通过增大 K_p, K_v , 可使球半径任意小.

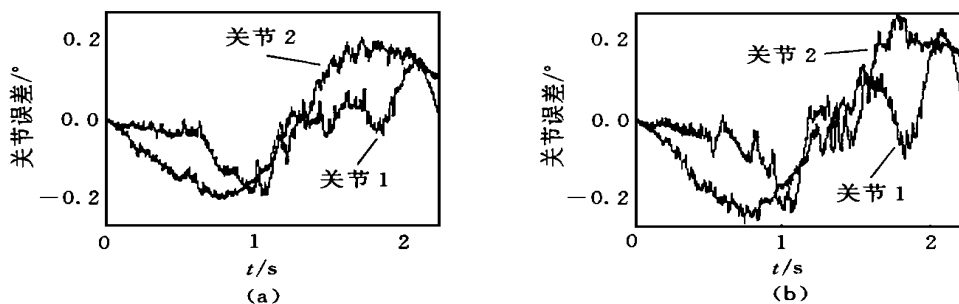


图 1 PD 控制跟踪结果

(a) 没有负载 (b) 带 3kg 负载

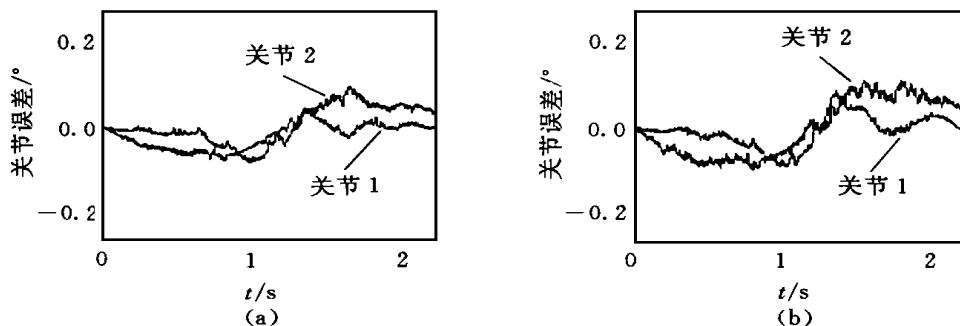


图 2 PD 自适应控制跟踪结果

(a) 没有负载 (b) 带 3kg 负载

5 实验研究

实验对象为一应用于异形玻璃切割的两关节直接驱动机器人, 该机器人的动力学模型为

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ D_{21} \cos(\theta_1 - \theta_2) & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{12} \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ -D_{12} \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{bmatrix} = \tau$$

其中, $D_{11} = 5.6794 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $D_{12} = D_{21} = 1.4730 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $D_{22} = 1.7985 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

矩阵 Y, P 选择如下

$$Y(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \theta_d) = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_d & \ddot{\theta}_d \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_d \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 & 0 \\ 0 & \ddot{\theta}_d \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_d \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & \ddot{\theta}_d \end{bmatrix}$$

$$P = [D_{11}, D_{12}, D_{22}]^T$$

控制目标是让机器人以 0.5 m/s 的速度跟踪长度为 700 mm 的直线, 按梯形速度规划。分别进行不带载跟踪和带 3 kg 负载跟踪, 控制率中的速度项通过线性观测器获取。为了检验自适应项的控制效

果, 跟踪结果与 PD 控制的跟踪结果进行比较(即式 3(a) 中置 $M(\theta)\ddot{\theta}_d + \hat{C}(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_d + \hat{G}(\theta) = 0$)。控制参数为 $k_{p1} = 2900$, $k_{p2} = 1200$, $k_{v1} = 130$, $k_{v2} = 130$, $\alpha = 2$, $\Psi^1 = 9000$ 。

图 1 是 PD 控制的跟踪结果, 图 2 是自适应算法的跟踪结果, D_{11}, D_{12}, D_{22} 初始值为 0。实验结果表明, 本文算法的跟踪结果明显好于 PD 控制的跟踪结果, 式(3)中自适应项的效果非常明显; 增加 3 kg 负载后, PD 控制的跟踪误差增大, 幅度达 0.0606° , 而本文算法的跟踪误差变化幅度很小, 说明式(3)所示控制算法对模型不确定性有很好的鲁棒性。

6 结 论

本文提出一种全局指数收敛的 PD 自适应轨迹跟踪算法, 该算法直接利用机器人期望轨迹, 而不需要定义虚拟参考轨迹。对给定的跟踪轨迹, 期望轨迹可以离线计算, 这将大大减少在线计算量; 由于没有参数缓慢变化的限制, 只知动力学模型结构, 不需要确定不确定参数, 结构简单, 容易实现; 能够完全克服模型误差产生的轨迹误差, 能使有界不确定

性干扰产生的轨迹误差任意小。两关节直接驱动机器人的实验研究,证明了本文方法的有效性和对模型不确定性的鲁棒性。

参考文献

- 1 J J Slotine, W Li. On the adaptive control of manipulators. *Int J of Robotics Research*, 1987, 6(3): 49 ~ 59
- 2 J Craig, P Hsu, S Sastry. Adaptive control of robot manipulators. *Int J of Robotics Research*, 1987, 6(2): 16 ~ 28
- 3 N Sadegh, R Horowitz. An exponentially stable adaptive control law for robot manipulators. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 1990, 6(4): 491 ~ 497
- 4 M W Spong. On the robust control of robot manipulators. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(11): 1782 ~ 1786
- 5 J Imura, T Sugie, T Yoshikawa. Adaptive robust control of robot manipulators-theory and experiment. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 1994, 10(5): 705 ~ 709
- 6 F Alonge, F D Ippolito, F M Raimondi. An adaptive

control law for robotic manipulator without velocity feedback. In: *Proc of the 14th World Congress of IFAC*. Beijing: Int Convention Center, 1999. B: 239 ~ 244

- 7 D S Bayard, J T Wen. New class of control laws for robotic manipulators. *Int J of Control*, 1988, 47(5): 1387 ~ 1406
- 8 H Berghuis, R Ortega, H Nijmeijer. A robust adaptive robot controller. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 1993, 9(6): 825 ~ 830
- 9 陈启军. 宏-微机器人系统及其轨迹控制研究. 上海: 同济大学博士学位论文, 1999

作者简介

陈启军 男, 1966年生。1999年在同济大学获博士学位, 现为该校副教授。主要研究方向为机器人控制与智能控制。

王月娟 女, 1935年生。1958年毕业于西安交通大学, 现为同济大学教授, 博士生导师。主要研究方向为机器人控制与智能控制。

陈辉堂 男, 1933年生。1953年毕业于上海交通大学, 现为同济大学教授, 博士生导师。主要研究方向为机器人控制与智能控制。

(上接第 677 页)

参考文献

- 1 席裕庚. 复杂工业过程的满意控制. *信息与控制*, 1995, 24(1), 14 ~ 20
- 2 Jeffrey T Spooner, Kevin M Passino. Adaptive predictive using fuzzy systems and neural networks. In: *Proc of ACC 97*. Albuquerque, 1997. 1266 ~ 1270
- 3 Kim Jin-Hwan, Huh UK-Youl. Fuzzy model based predictive control. In: *Proc of IEEE Int Conf on Fuzzy Systems*. Anchorage, 1998. 405 ~ 409
- 4 Fischer M Martin, Nelles Oliver, Isermann Rolf. Predictive control based on local linear fuzzy models. *Int J Systems Science*, 1998, 29(7): 679 ~ 697
- 5 张化光, 吕剑虹, 陈来九. 模糊广义预测控制及其应用. *自动化学报*, 1993, 19(1): 9 ~ 17
- 6 Clarke D W, Mohtadi C. Properties of generalized predictive control. *Automatica*, 1989, 25(6): 859 ~ 875
- 7 王群仙, 陈增强, 袁著祉. 基于 BP 网络的 PID 型预测自

校正控制器. *控制与决策*, 1998, 13(2): 185 ~ 188

- 8 席裕庚, 谷寒雨. 有约束多目标多自由度优化的可行性分析及软约束调整. *自动化学报*, 1998, 24(6): 727 ~ 732
- 9 Yager R R. On a general class of fuzzy connectives. *Fuzzy Sets and Systems*, 1980, 4: 235 ~ 242
- 10 Bordons C, Camacho E F. A generalized predictive controller for a wide class of industrial processes. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 1998, 6(3): 372 ~ 387

作者简介

李少远 男, 1965年生。上海交通大学自动化所教授。研究领域为预测控制, 模糊控制, 自适应控制理论与应用。

席裕庚 男, 1946年生。上海交通大学自动化研究所教授, 博士生导师。主要研究方向为复杂系统控制理论, 智能机器人等。