

# 时变调参控制系统的稳定裕度\*

王 勇 高金源

(北京航空航天大学自动控制系 100083)

**摘要** 提出时变调参控制系统的稳定裕度概念,并给出基于线性矩阵不等式的稳定裕度限的计算方法。将稳定裕度概念及其计算方法应用于调参飞行控制系统,结果表明该方法是可行且有效的。

**关键词** 稳定裕度,时变系统,控制系统,控制器,调参控制

**分类号** TP 271.7

## Stability Margin of Time-varying Gain-scheduling Control System

Wang Yong, Gao Jinyuan

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

**Abstract** The concept of stability margin of gain-scheduling control systems is presented. Based on linear matrix inequality, a method for calculating low bound of the stability margin is developed. An application to gain-scheduling flying control systems shows the validity of the method.

**Key words** stability margin, time-varying systems, control systems, controller, gain-scheduling control

### 1 时变系统调参控制器设计

设被控对象模型为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(p(t))x(t) + B_1(p(t))w(t) + B_2(p(t))u(t) \\ z(t) = C_1(p(t))x(t) + D_{11}(p(t))w(t) + D_{12}(p(t))u(t) \\ y(t) = C_2(p(t))x(t) + D_{21}(p(t))w(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $x(t)$  为  $n$  维状态向量,  $u(t)$  为输入向量,  $w(t)$  为外界输入向量,  $z(t)$  为控制输出向量,  $y(t)$  为检测向量; 调参向量  $p(t)$  为时变的, 反映了对象的时变性(以下以  $p$  表示  $p(t)$ ); 所有向量和矩阵均具有兼容的维数。对象的动态特性随调参向量的改变而改变。通常不能事先确定调参向量的变化轨迹, 但其变化范围及变化速度范围已知。

为使闭环系统在  $p$  的变化范围内具有较好的性

能, 采用调参控制器设计方法对对象(1) 设计控制器。现代调参控制器设计方法将控制与调参合为一步完成, 从而保证了闭环系统在整个工作包线内的稳定性和性能<sup>[1,2]</sup>, 并提高了设计效率。

调参控制器设计问题为: 对被控对象(1) 设计如下控制器

$$\begin{cases} \dot{x}^k(t) = A^k(p)x(t) + B^k(p)y(t) \\ u(t) = C^k(p)x(t) + D^k(p)y(t) \end{cases} \quad (2)$$

使由式(1)和(2)组成的闭环系统稳定, 且由  $w(t)$  到  $z(t)$  的  $L_2$  诱导范数小于  $\gamma$  ( $\gamma > 0$ ), 即  $\|z(t)\|_2 < \gamma \|w(t)\|_2$  (称为  $\gamma$  性能)。

若式(1)中的状态空间矩阵仿射地依赖于  $p$ , 则称其为调参向量的仿射模型, 实际中广泛存在这类对象; 若为非仿射模型, 则可经过一定的处理, 用仿射模型代替非仿射模型。

**定义 1** (调参向量凸包) 设调参向量  $p$  的  $r$  个点为  $p_1, p_2, \dots, p_r$ , 由这  $r$  个调参向量点形成的凸包称为调参向量凸包。

以  $\Phi$  表示调参向量凸包, 则

$$\Phi = \left\{ p \mid p = \sum_{i=1}^r [\alpha_i \cdot p_i], \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \right\}$$

由基于单一 Lyapunov 函数和二次  $H_2$  性能的现代调参控制器设计方法<sup>[3]</sup>, 对式(1) 设计调参控制器, 其状态空间矩阵为

$$K(p) = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r [\alpha_i(t) K_i] = \sum_{i=1}^r \left\{ \alpha_i(t) \begin{bmatrix} A_{K_i} & B_{K_i} \\ C_{K_i} & D_{K_i} \end{bmatrix} \right\} \quad (3)$$

其中

$$K_i = \begin{bmatrix} A_{K_i} & B_{K_i} \\ C_{K_i} & D_{K_i} \end{bmatrix}$$

为已求出的  $r$  个顶点控制器<sup>[3]</sup>,  $\alpha_i(t)$  实时确定如下

$$\sum_{i=1}^r [\alpha_i(t) p_i] = p, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) = 1, \quad \alpha_i(t) \geq 0$$

## 2 调参控制系统的稳定裕度

由于设计控制器所使用的被控对象模型参数与真实值存在着差异, 同时这些参数在系统实际运行中, 会因环境变化及原部件老化等原因产生摄动, 于是自然提出系统参数在多大范围内变化可保证系统的稳定性问题。对于线性时不变系统, 可在频域内应用幅值裕度和相位裕度对系统的稳定裕度进行衡量, 而调参控制系统为时变系统, 因此幅值裕度和相位裕度不再适用。

**定义 2(调参控制系统稳定裕度)** 在调参控制系统中, 设对象的状态空间矩阵  $A(p)$  中具有摄动性的元素为  $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$ ,  $a_i$  在名义值基础上的摄动量为  $\Delta_i$ 。工作包线内在  $\Delta_i \in [-\delta J_i, \delta J_i]$  的条件下, 使调参控制系统闭环稳定的最大  $\delta$  称为调参控制系统的稳定裕度, 记为  $\delta_m$ 。其中  $J_i$  表示  $a_i$  的名义变化范围。

闭环系统的状态矩阵

$$A_d(p, \Delta) = \begin{bmatrix} A(p, \Delta) + B_2(p) D_K(p) C_2(p) & B_2(p) C_K(p) \\ B_K(p) C_2(p) & A_K(p) \end{bmatrix}$$

调参控制器的设计考虑了执行机构和检测传感器的动态特性, 其模型可认为是时不变的, 因此  $B_2(p)$  和  $C_2(p)$  为常阵。由于调参控制器的数字实现可保证其参数的稳定, 只有对象的参数摄动对闭环系统的稳定性有影响, 所以一旦调参控制器确定, 调参控制

系统的稳定性将取决于对象的  $A(p)$ 。 $A(p)$  对  $p$  的名义函数关系和实际函数关系必然存在差异, 同时其它干扰也可能加剧这种差异, 因此, 所定义的稳定性充分反映了调参控制系统对包括模型误差及其它干扰的稳定鲁棒性。

## 3 调参控制系统稳定裕度的计算

现以基于单一 Lyapunov 函数和二次  $H_2$  性能的方法设计调参控制器的情况, 说明调参控制系统稳定裕度的计算。

闭环系统由式(1) 和(2) 组成, 其中各个矩阵仿射地依赖于  $p$ ,  $B_2$  和  $C_2$  为常阵。 $A(p)$  中具有摄动性的元素有  $m$  个, 问题是要确定一个尽量大的  $\delta$ , 使每个摄动元素的摄动量在满足  $\Delta_i \in [-\delta J_i, \delta J_i] (i = 1, 2, \dots, m)$  的条件下, 调参控制系统闭环稳定。这时可认为该调参控制系统的稳定裕度不小于  $\delta$ 。

**定义 3(摄动凸包)** 设对象状态空间矩阵  $A(p)$  中具有摄动性的元素有  $m$  个, 其摄动分别为  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ , 称  $q = [\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m]^T$  为摄动向量,  $\Delta_i (i = 1, 2, \dots, m)$  取上极限或下极限值, 形成  $2^m$  个摄动向量  $q_i (i = 1, 2, \dots, 2^m)$ , 称为摄动向量顶点。由这些摄动顶点形成的凸包称为摄动凸包, 以  $\Gamma$  表示。

**定理 1** 设调参控制系统由式(1) 和(2) 组成, 其中各个矩阵仿射地依赖于  $p$ ,  $B_2$  和  $C_2$  为常阵, 调参控制器由式(3) 确定。若存在对称矩阵  $X > 0$ , 使

$$A_d^T(p_i, 0) X + X A_d(p_i, 0) + M^T(q_j) X + X M(q_j) < 0$$

$$i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, 2^m$$

则对  $\forall p \in \Phi$  及  $\forall q \in \Gamma$ , 调参闭环系统均稳定。其中

$$M(q) = \begin{bmatrix} N & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

$N$  为被控对象矩阵  $A$  中第  $i$  个具有摄动性的元素被  $q$  的第  $i$  个分量取代, 其余元素被零取代所形成的矩阵。

证明略。

由定理 1 可计算出调参控制系统稳定裕度的一个下界, 即计算出  $\delta > 0$ , 调参控制系统的稳定裕度不小于  $\delta$ 。为此, 令  $\Delta_i (i = 1, 2, \dots, m)$  的上下极限值分别为  $\delta J_i$  和  $-\delta J_i$ , 此时摄动向量顶点  $q_i$  的第  $i$  个分量非  $\delta J_i$  即  $-\delta J_i$ ; 引入向量  $s_j \in R^m$ , 其第  $i$  个分量非  $J_i$  即  $-J_i$ , 且  $q_i = \delta s_j$ 。因此  $M(q_i) = \delta M(s_j)$ , 代入定理 1 矩阵不等式, 得



若 $A_{11}$ ,  $A_{21}$ 和 $A_{22}$ 的摄动不超出 $[-1.04, 1.04]$ ,  $[-11.5, 11.5]$ 和 $[-2.54, 2.54]$ , 则调参闭环系统可保持稳定, 如图3所示。图中 $A_{11}$ ,  $A_{21}$ 和 $A_{22}$ 的摄动分别为1.04, -11.5和2.54。

## 5 结 语

本文提出的调参控制系统稳定裕度的概念及稳定裕度限的计算方法, 使现代调参控制器设计理论更趋完善, 为对象模型的仿射化调参控制器设计提供了理论依据。所提出的概念和计算方法同样适用于被控对象模型为调参向量非仿射模型的情况, 所不同的是, 系统的工作包线在计算前需要网格化, 定理1中的调参向量顶点由网格点代替, 在所选网格点处计算的稳定裕度, 需要进一步密化网格点进行验证。由于所提出的稳定裕度计算方法是基于单一Lyapunov函数的, 因而具有一定的保守性。尽管如此, 应用该计算方法仍可给出调参系统稳定裕度的一个界, 对实际工程应用具有重要意义。本文提出的概念和方法同样适用于调参控制 $\gamma$ 性能的裕度问

题。

## 参 考 文 献

- 1 王勇, 高金源. 时变系统的控制器调参设计. 北京航空航天大学学报, 1999, 25(3): 275 ~ 279
- 2 Shamma J S, Athans M. Gain scheduling: Potential hazards and possible remedies. IEEE Contr Syst Mag, 1992, 12(3): 101 ~ 107
- 3 Apkarian P, Gahinet P, Becker G. Self-scheduled  $H$  control of linear parameter-varying system. Automatica, 1995, 31(9): 1251 ~ 1261

## 作 者 简 介

王 勇 男, 1966年生。北京航空航天大学自动控制系博士研究生。主要研究方向为鲁棒控制及应用, 现代调参控制器设计及应用, 先进飞行控制系统设计等。

高金源 男, 1936年生。北京航空航天大学自动控制系教授, 博士生导师。主要研究方向为先进飞行控制系统设计, 计算机控制系统, 飞行安全与空中交通管理等。

## 下 期 要 目

马尔可夫决策过程自适应决策的进展 .....	李江洪 韩正之
多层递阶方法理论与应用的进展 .....	韩志刚
混沌与分形在化工过程控制中的应用 .....	仲 蔚 俞金寿
钢铁企业物流研究概述 .....	高 振 唐立新 等
离散事件系统的稳定性 .....	俞新贞 吴 澄
具有模糊参数的大工业过程的关联预测法 .....	顾佳晨 万百五
不确定线性系统鲁棒二次最优控制的时频域方法 .....	薛安克 吕应权 等
采用DNA遗传算法优化设计的TS模糊控制系统 .....	任立红 一永生 等
用等距脉冲反馈方法实现超混沌的控制 .....	沈 辉 胡德文
时滞不确定组合大系统的鲁棒分散镇定 .....	刘粉林 刘 媛 等
Job shop排序问题解空间定量分析 .....	王 波 张 群 等
自组织RBF神经网络对驾驶员安全性因素的辨识 .....	马 勇 杨煜普 等
一种求解多执行模式资源水平问题的遗传算法 .....	刘士新 王梦光
基于系统辨识的自适应混沌同步控制研究 .....	齐冬莲 魏金岭 等
连续状态模糊控制系统的分区域稳定性分析 .....	李永明 史忠科