第 15 卷 第 6 期 控 制 与 决 策 2000 年 11 月
Vol. 15 No. 6 CONTROL AND DECISION Nov. 2000

存贷利率不等下具有随机跳跃收入的消费与投资策略*

黄 薇 曹长修 曹国华 唐小我
(重庆大学自动化系 400044) (重庆大学工商管理学院) (电子科技大学工商管理学院)

摘 要 研究贷款利率大于存款利率下具有随机跳跃收入的最优策略,拓展了 Merton 模型。给出了财富预算方程,运用动态规划原理及随机分析导出该问题的 HJB 方程,并由此得到一般情形下抽象形式的解。在一类特殊 HARA 情形下讨论了具有显式反馈形式的最优消费和投资策略。

关键词 HJB 方程,动态规划原理,消费与投资策略,Poisson 微分方程

分类号 O 221.3

Optimal Consumption and Investment Strategies with a Stochastic Jump Income under Unequal Loan and Deposit Rate

Huang Wei, Cao Changxiu, Cao Guohua *Tang Xiaowo*
(Chongqing University) (UEST of China)

Abstract The model of Merton is extended and the wealth budget equation is given. Optimal strategies are obtained with an abstract form in general cases via HJB equation which is derived from dynamic programming principle and stochastic analysis. For the specific HARA case, the optimal consumption and investment strategies with explicit feed-back form are discussed.

Key words HJB equation, dynamic programming principle, consumption and investment strategies, Poisson differential equation

1 引 言

连续时间情形下动态消费和投资组合理论的研究始于诺贝尔经济学奖得主 Merton[1]。Merton 在文献[2]中也论及当投资者拥有非资本利得时的最优消费与投资策略问题,但这些问题都有共同的假设,即投资者可以相同的无风险利率任意存款和贷款,而且绝大多数分析均假定财富过程为布朗运动的光滑函数。然而,现实中贷款利率确实大于存款利率,而且投资者一般都拥有可能随机跳跃的收入流(非资本利得)。因此,本文在贷款利率大于存款利率下研究具有随机跳跃收入的最优消费与投资策略更具现实意义。

2 问题描述及最优策略

2.1 Poisson 过程描述的随机跳跃收入

Poisson 过程是一种连续时间过程,但允许变量离散变化,因而可用来描述随机跳跃收入。最简单的独立 Poisson 过程定义一个事件在长为 h 的任意小时间区间上发生的概率为

$$\begin{cases} \text{prob}\{\text{此事件在}(t,t+h)\text{ 上不发生}\} = 1-\lambda h+o(h) \\ \text{prob}\{\text{此事件在}(t,t+h)\text{ 上发生一次}\} = \lambda h+o(h) \\ \text{prob}\{\text{此事件在}(t,t+h)\text{ 上发生一次以上}\} = o(h) \end{cases} \tag{2.1}$$

* 1999-09-24 收稿, 1999-12-09 修回

其中, prob 表示概率, $o(h)$ 为 h 的高阶无穷小(下同), λ 是单位时间事件发生的平均数。

令 $q(t)$ 为一个具有式(2.1) 描述的概率结构的独立 Poisson 过程。考虑某投资者以速率 $Y(t)$ 得到非资本利得的某种收入(如工资等), 且 $Y(t)$ 可能在随机时间点以一个常量 ϵ 增值。设收入增加(即 $Y(t)$ 以常量 ϵ 跳跃) 为 $q(t)$ 中的事件, 则 $Y(t)$ 满足如下的 Poisson 微分方程

$$\mathrm{d}Y = \epsilon \mathrm{d}q, \quad Y(0) = Y_0 \tag{2.2}$$

2.2 问题描述及模型建立

考虑某投资者拥有式(2.2) 描述的收入 $Y(t)$。在市场中投资者有两种不同的投资选择: 一种是关于存、贷款的金融资产, 用 M 表示, 其价格 P_0 满足如下常微分方程

$$\mathrm{d}P_0(t) = \begin{cases} r(t)P_0(t)\mathrm{d}t, & P_0(t) \geq 0 \\ r'(t)P_0(t)\mathrm{d}t, & P_0(t) < 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

其中, 对投资者而言, $P_0(t) \geq 0$ 表示存款, $r(t)$ 为存款利率; $P_0(t) < 0$ 表示贷款, $r'(t)$ 为贷款利率。另一种是有风险资产(如股票), 其价格 $P(t)$ 满足一个对数正态型扩散

$$\mathrm{d}P(t) = \alpha(t)P(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)P(t)\mathrm{d}Z(t) \tag{2.4}$$

其中, $\alpha(t)$ 为回报的预期收益率, $\sigma(t)$ 为瞬时发散度, $Z(t)$ 为与 $q(t)$ 独立的一维标准布朗运动。

不失一般性, 设 $r(t)$, $r'(t)$, $\alpha(t)$ 及 $\sigma(t)$ 在 $t \in [0, T]$ 上均有界, $r(t) \leq r'(t) \leq \alpha(t)$。在时刻 t, 记 $W(t)$ 为投资者的财富, $\Pi(t)$ 为投资于风险资产的财富数量, $C(t)$ 为消费率过程。$\Pi(t)$ 为负, 表示卖空股票; 投资于 M 的财富数量 $W(t) - \Pi(t)$ 为负, 表示以利率 $r'(t)$ 贷款, 但均为有界。

由文献[2] 采用 Ito 公式, 容易导出具有随机跳跃收入的投资者的财富预算约束方程为

$$\begin{cases} \mathrm{d}W(t) = [r(t)W(t) - C(t) + \\ \qquad (\alpha(t) - r(t))\Pi(t) - \\ \qquad (r'(t) - r(t))(W(t) - \Pi(t))^- + \\ \qquad Y(t)]\mathrm{d}t + \sigma(t)\Pi(t)\mathrm{d}Z(t) \\ W(0) = W_0 \geq 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

满足式(2.5) 的$(C.,\Pi.)$ 为允许策略, 允许策略构成的集合记为 U_{ad}。

本文的问题是投资者要通过恰当的消费与投资选择$(C.,\Pi.) \in U_{ad}$, 以最大化预期效用

$$J(C.,\Pi.;W_0,Y_0,0) = E_0\left\{\int_0^T U(C(t),t)\mathrm{d}t + B(W(T),T)\right\} \tag{2.6}$$

其中, E_0 为关于 $W(0) = W_0, Y(0) = Y_0$ 的条件期望算子。

2.3 HJB 方程及最优策略

考虑随机控制系统(2.5), 目标泛函为式(2.6), 由边际效用递减, 效用函数 $U(C,t)$ 在 C 严格凹, $B(W,T)$ 在 W 是凹的。定义值函数

$$v(W_0,Y_0,0) = \max_{\{C.,\Pi\}} J(C.,\Pi;W_0,Y_0,0) \tag{2.7}$$

为导出 HJB 方程, 定义

$$v[W(t),Y(t),t] \equiv \max_{\{C(s),\Pi(s)\}} E_t\left\{\int_t^T U(C(s),s)\mathrm{d}s + B(W(T),T)\right\} \tag{2.8}$$

其中 E_t 为关于已知 $W(t)$ 及 $Y(t)$ 的条件期望算子(下同)。则由动态规划原理, 对 $0 \leq t_0 < t \leq T$, 有

$$v[W(t_0),Y(t_0),t_0] = \max_{\{C(s),\Pi(s)\}} E_{t_0}\left\{\int_{t_0}^{t} U(C(s),s)\mathrm{d}s + v(W(t),Y(t),t)\right\} \tag{2.9}$$

由积分中值定理、条件期望的性质及式(2.1), 得

$$\begin{aligned} v[W(t_0),Y(t_0),t_0] = & \max_{\{C,\Pi\}}\{E_{t_0}[U(C(\bar t),\bar t)(t - t_0)] + \\ & \lambda(t - t_0)E_{t_0}[U(C(\bar t),\bar t)(t - t_0)] + \\ & \lambda(t - t_0)E_{t_0}[v(W(t),Y(t_0) + \\ & \epsilon, t) \mid Y(t) = Y(t_0) + \epsilon] + \\ & (1 - \lambda(t - t_0))E_{t_0}[v(W(t), \\ & Y(t_0),t) \mid Y(t) = Y(t_0)] + o(t - t_0)\} \end{aligned} \tag{2.10}$$

其中 $\bar t \in [t_0, t]$。如果 $v[W(t_0),Y(t_0),(t_0)]$ 关于 W 及 t 的三阶偏导数有界, 借助于 Taylor 展式, 利用 $q(t)$ 与 $Z(t)$ 独立及随机积分的性质[3], 并且移项, 然后两边同除以$(t - t_0)$, 并令 $t \to t_0$, 整理后可得此问题的 HJB 方程如下, 对一切 $t \in [0, T]$

$$\begin{cases} v_t + (Y + r(t)W)v_w + \\ \lambda[v(W,Y + \epsilon,t) - v(W,Y,t)] + \\ \max\limits_{c}\{U(C,t) - v_w C\} + \\ \max\limits_{\Pi}\{(\alpha(t) - r(t))\Pi v_W - \\ (r'(t) - r(t))(W - \Pi)^- v_W + \\ \sigma^2(t)v_{ww}\Pi^2/2\} = 0 \\ v(W(T),Y(T),T) = B(W(T),T) \end{cases} \tag{2.11}$$

其中 $W = W(t), Y = Y(t), \Pi = \Pi(t)$

$v_t = \partial v(W(t),Y(t),t)/\partial t$

$v_w = \partial v(W(t),Y(t),t)/\partial W$

$v_{ww} = \partial^2 v(W(t),Y(t),t)/\partial W^2$

设 C^*, Π^* 为最优策略, 记 G 为 U_c^{-1}, 则由式(2.11) 及 U 的严格凹性知

$$C^*(t) = G[v_w, t] \tag{2.12}$$

为求 Π^*, 记

$$\begin{aligned} f(\Pi) = & (\alpha(t) - r(t)) v_w \Pi - \\ & (r'(t) - r(t))(W - \Pi)^- v_w + \\ & \sigma^2(t) v_{ww} \Pi^2/2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} f_1(\Pi) = & (\alpha(t) - r(t)) v_w \Pi + \\ & \sigma^2(t) v_{ww} \Pi^2/2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} f_2(\Pi) = & (\alpha(t) - r'(t)) v_w \Pi + \\ & \sigma^2(t) v_{ww} \Pi^2/2 + (r'(t) - r(t)) W v_w \end{aligned} \tag{2.15}$$

显然, 当 $\Pi \le W$ 时, $f(\Pi) \equiv f_1(\Pi)$; 当 $\Pi > W$ 时, $f(\Pi) \equiv f_2(\Pi)$。

易知 $\max\limits_{\Pi} f_1(\Pi) = -(\alpha(t) - r(t))^2 v_w^2/2\sigma^2(t) v_{ww}$ 在 $\Pi_1^*(t) = -(\alpha(t) - r(t)) v_w/\sigma^2(t) v_{ww}$ 处达到, $\max\limits_{\Pi} f_2(\Pi) = -(\alpha(t) - r'(t))^2 v_w^2/2\sigma^2(t) v_{ww} + (r'(t) - r(t)) W v_w$ 在 $\Pi_2^*(t) = -(\alpha(t) - r'(t)) v_w/\sigma^2(t) v_{ww}$ 处达到。注意到 $\Pi_2^*(t) \le \Pi_1^*(t)$, 下面分 3 种情形考虑 $\max\limits_{\Pi} f(\Pi)$。

情形 1　如果 $W(t) \le \Pi_2^*(t)$, 则

$$\begin{aligned} \Pi^*(t) = & \Pi_2^*(t) = \\ & -(\alpha(t) - r'(t)) v_w/\sigma^2(t) v_{ww} \end{aligned} \tag{2.16}$$

由 $\max\limits_{\Pi} f(\Pi) = \max\limits_{\Pi} f_2(\Pi)$ 及式(2.11), (2.12) 可得相应 HJB 方程为

$$\begin{cases} v_t + (Y + r'(t) W) v_w + \\ \lambda[v(W, Y + \epsilon, t) - v(W, Y, t)] + \\ U[G(v_w, t), t] - v_w G(v_w, t) - \\ (\alpha(t) - r'(t))^2 v_w^2/2\sigma^2(t) v_{ww} = 0 \\ v(W(T), Y(T), T) = B(W(T), T) \end{cases} \tag{2.17}$$

最优策略为式(2.12) 和(2.16), 其中 $v(W, Y, t)$ 是 (2.17) 的解。

情形 2　如果 $W(t) \ge \Pi_1^*(t)$, 则

$$\begin{aligned} \Pi^*(t) = & \Pi_1^*(t) = \\ & -(\alpha(t) - r(t)) v_w/\sigma^2(t) v_{ww} \end{aligned} \tag{2.18}$$

由 $\max\limits_{\Pi} f(\Pi) = \max\limits_{\Pi} f_1(\Pi)$ 知, 把情形 1 的 HJB 方程中 $r'(t)$ 换成 $r(t)$ 即得相应 HJB 方程。最优策略为式 (2.12) 和(2.18), 其中 $v(W, Y, t)$ 为该情形 HJB 方程的解。

情形 3　如果 $\Pi_2^*(t) < W(t) < \Pi_1^*(t)$, 则

$$\Pi^*(t) = W(t) \tag{2.19}$$

由 $\max\limits_{\Pi} f(\Pi) = f(W)$ 及式(2.11), (2.12) 即得相应 HJB 方程。最优策略为式(2.12) 和(2.19), 其中 $v(W, Y, t)$ 为该情形 HJB 方程的解。

求以上 HJB 方程的显式解是相当困难的, 一般可由数值方法求最优策略。

3　一类特殊的 HARA 情形下显式反馈策略的讨论

考虑目标泛函

$$\begin{aligned} & J(C., \Pi.; W, Y, 0) = \\ & E_0\left\{\int_0^\infty e^{-\rho t} V(c) \mathrm{d}t\right\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中, $V(C) = -\exp(-\eta C)/\eta (\eta > 0)$ 为一类特殊 HARA 效用函数族[2], ρ 为贴现因子。值函数由式(2.7) 给出, HJB 方程由式(2.11) 给出, 其中 $U(C, t)$ 为 $e^{-\rho t} V(C)$。假定 $r(t), r'(t), \alpha(t), \sigma(t)$ 均为常数, 且 $r' > r$。定义 $I(W(t), Y(t), t) \equiv e^{\rho t} v(W(t), Y(t), t)$, 可以消除 $I(W(t), Y(t), t)$ 对时间的显式依赖, 即 $I(W(t), Y(t), t) \equiv I(W(t), Y(t))$。代入式(2.11), 化简得 HJB 方程为

$$\begin{cases} (rW + Y) I_w - \rho I(W, Y) + \\ \lambda[I(W, Y + \epsilon) - I(W, Y)] + \\ \max\limits_{C}\{V(C) - I_w C\} + \\ \max\limits_{\Pi}\{(\alpha - r)\Pi I_w - (r' - r) \times \\ (W - \Pi)^- I_w + \sigma^2 I_{ww} \Pi^2/2\} = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} E\{e^{-\rho t} I(W, Y)\} = 0 (\text{横截条件}) \end{cases} \tag{3.2}$$

由式(2.12) 易知

$$C^*(t) = G(I_w, t) = -\ln I_w/\eta \tag{3.3}$$

注意到, 如未引入随机跳跃收入, HJB 方程将从一般的偏微分方程变为较易解的常微分方程。但现在 HJB 方程仍为偏微分方程。下面就 3 种情形讨论显式最优反馈策略。

情形 1　如果 $W(t) \le \Pi_2^*(t)$, HJB 方程为

$$\begin{aligned} & r' W I_w + Y I_w - \rho I(W, Y) + \\ & \lambda[I(W, Y + \epsilon) - I(W, Y)] + \\ & I_w(\ln I_w - 1)/\eta - \\ & (\alpha - r')^2 I_w^2/2\sigma^2 I_{ww} = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

经试探得式(3.4) 满足横截条件及文献[1] 中充分条件的解为

$$\begin{aligned} I(W, Y) = & \frac{-1}{\eta r'} \exp\{-\eta r' W - \\ & \eta Y - \frac{\lambda[1 - \exp(-\eta\epsilon)]}{r'}\} \times \end{aligned}$$

$$\exp\left\{\frac{r'-\rho-(\alpha-r')^2/2\sigma^2}{r'}\right\} \quad (3.5)$$

由式(2.16),(3.3)得最优消费与投资的显式反馈策略

$$C^*(t)=r'\{W(t)+Y(t)/r'+\lambda[1-\exp(-\eta\epsilon)]/\eta r'^2\}+[\rho-r'+(\alpha-r')^2/2\sigma^2]/\eta r' \quad (3.6)$$

$$\Pi^*(t)=(\alpha-r')/\eta\sigma^2 r' \quad (3.7)$$

情形 2 如果 $W(t)\geq\Pi_1^*(t)$,把式(3.4)中 r' 换成 r 即得该情形的 HJB 方程,从而把(3.5)中 r' 换成 r 即得该情形 HJB 方程的显式解。由式(2.18)和(3.3)得最优消费与投资的显式反馈策略为

$$C^*(t)=r[W(t)+Y(t)/r+\lambda[1-\exp(-\eta\epsilon)]/\eta r^2]+[\rho-r+(\alpha-r)^2/2\sigma^2]/\eta r \quad (3.8)$$

$$\Pi^*(t)=(\alpha-r)/\eta\sigma^2 r \quad (3.9)$$

情形 3 如果 $\Pi_2^*(t)<W(t)<\Pi_1^*(t)$,则 HJB 方程为

$$\alpha W I_w+YI_w-\rho I(W,Y)+\lambda[I(W,Y+\epsilon)-I(W,Y)]+I_w(\ln I_w-1)/\eta-\sigma^2 I_{ww}W^2/2=0 \quad (3.10)$$

式(3.10)的显式解很难求出,可用数值方法求解。最优消费与投资的反馈策略为式(2.19)和(3.3)。

4 结 语

本文拓展了 Merton[1]的模型,解决了贷款利率大于存款利率下具有随机跳跃收入流的最优消费与投资策略问题,并求出具有反馈形式的最优策略。针对一类特殊 HARA 情形,根据显式最优反馈策略讨论了存贷款利率、随机跳跃收入及风险资产的预期收益率对最优消费与投资策略的影响。对于这类特殊效用函数,虽然情形 3 的最优消费策略无显式形式,但由情形 1 和情形 2 可得如下结论:随机跳跃收入只影响消费;在需贷款时,贷款利率影响最优消费与投资策略,与存款利率无关;相反,需存款时,存款利率影响最优消费与投资策略,与贷款利率无关;特别是提高风险资产的预期收益率 α 以及增加随机收入都可刺激消费。

参 考 文 献

1 Merton R. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. Review of Economics and Statistics, 1969, 51(4): 247～257

2 Merton R. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. J of Economic Theory, 1971, 3(12): 373～413

3 何声武,任嘉冈,严加安. 半鞅与随机分析. 北京: 科学出版社, 1995

4 Duffie D. Security markets: Stochastic models. New York: Academic Press, 1988

5 Zariphopoulou T. Consumption-investment models with constraints. SIAM J Control and Optimization, 1994, 32(1): 59～85

作 者 简 介

黄 薇 女,1968 年生。1992 年于四川大学数学系获理学硕士学位,现为重庆大学自动化系在职博士研究生。研究方向为经济控制论,金融工程等。

曹长修 男,1937 年生。1959 年毕业于上海交通大学,现为重庆大学自动控制研究所教授,博士生导师。研究方向为经济预测,决策,信息经济学及数据采掘。

曹国华 男,1967 年生。1992 年于四川大学数学系获理学硕士学位,现为重庆大学工商管理学院在职博士研究生。研究方向为金融工程,公司财务等。

唐小我 男,1955 年生。1994 年于重庆大学获博士学位,现为电子科技大学管理学院院长,博士生导师。主要研究方向为经济预测与决策,国际投资与国际市场营销。