第 15 卷 第 6 期　　控 制 与 决 策　　2000 年 11 月
Vol. 15 No. 6　　CONTROL AND DECISION　　Nov. 2000

基于 Neuman 故障源的实故障源模型*

邓北星　　S A Lozhkin
(清华大学电子工程系　北京　100084)　(莫斯科国立大学计算数学与控制论学院)

摘　要　基于 Neuman 故障源, 建立一种新的故障源模型, 即具有实输入数组的故障源模型(简称实故障源)。利用概率分析方法研究在实故障源作用下, 由函数单元构成的控制系统的可靠性, 并给出了系统不可靠度的下界估计。可靠性估计定理给出的下限值可作为工程实践中很有价值的参考点。

关键词　故障源, 不可靠度, 故障单元, 故障函数
分类号　TP 202.1

Model of Failure Source Possessing Real Input Sets Based on Neuman Failure Sources

Deng Beixing　　*S A Lozhkin*
(Tsinghua University)　(Moscow State University)

Abstract　Based on Neuman failure sources, a model of failure source possessing real input sets (FSRIS) is proposed with the method of probability analysis. The reliability of the systems affected by the failure sources is studied and a lower bound of the unreliability is presented. The reliability estimation theorem gives the lower limit for the unreliability of an arbitrary system which is referable to engineering practice.

Key words　failure source, unreliability, failure element, failure function

1　引　　言

在研究故障源作用下函数元系统的特性时, Neuman 和 Jablonski 给出一种故障源, 称为 Neuman 故障源。在其作用下函数元系统的可靠性评估满足 Neuman 定理[1,2]。Neuman 定理阐明了 Neuman 故障源的一个重要性质, 即在该故障源作用下, 由函数元构成的函数元系统可靠性的下界估计为一确定常数。深入研究表明, 满足 Neuman 定理故障源的条件是可以减弱的[3]。

基于 Neuman 故障源, 本文建立了一种新的故障源模型, 即实故障源模型, 并将 Neuman 故障源归结为实故障源的一种特殊情形。文中利用概率分析的方法研究了在实故障源作用下, 由函数单元构成的控制系统的可靠性, 并给出了系统不可靠度的下界估计。最后给出了实故障源的几个特例。

2　基本概念及 Neuman 故障源

本文用 Σ 表示由函数元构成的系统, 简称系统, 且构成 Σ 的单元取自某一集合 B。B^{n_i} 表示所有 n_i 维数组构成的集合。文中所指函数均为二值布尔逻辑函数, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示依赖于 n 个变量的二值逻辑函数。

定义 1　设存在系统 Σ 以及函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 如果在任意输入数组 $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ 的激励下, Σ 输出值 $f(\tilde{\sigma})$ 的概率不小于 1/2, 则称系统 Σ 输出(或实现) 函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

* 留学回国人员科研基金项目(9800197) 和清华大学骨干人才支持计划项目
1999 - 10 - 21 收稿, 2000 - 01 - 17 修回

设故障源 S 作用于 Σ。如果构成的 Σ 单元 F_k 在 S 作用下不发生故障，则称 F_k 为可靠单元；反之，如果 F_k 发生故障，则称其为不可靠单元。

设 $B = \{F_1, F_2, \cdots, F_u\}$ 为一单元集合，如果单元 F_i 是具有 $n_i(1 \le i \le u)$ 个输入端和一个输出端的初等变换器，且在正常状态下输出某一依赖于 n_i 个变量的函数 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n_i})$，则称 F_i 是一函数单元。因为用 B 中的函数单元可以构成系统，所以称 B 为构成系统的基底。假设 B 是由不可靠的函数单元构成的。

定义 2　B 中的单元 $F_i(i = 1, 2, \cdots, u)$ 在非故障状态（或称正常状态）下所实现的函数 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n_i})$ 称为正常函数，通常记为 $f_i^{(0)}(x_1, x_2, \cdots, x_{n_i})$。相应地，$F_i$ 在故障状态下所实现的函数称为故障函数。

在 S 的作用下，F_i 或保持正常状态或转变为故障元。相应地，函数 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n_i})$ 或为正常函数或转变为故障函数。

定义 3　给出单元 F_i 的正常函数和所有可能发生的故障函数以及相应发生概率的分布式

$$(G_i; P_i) \tag{1}$$

其中

$$G_i = (f_i^{(1)}(x_1, x_2, \cdots, x_{n_i}), f_i^{(2)}(x_1, x_2, \cdots, x_{n_i}), \cdots, f_i^{(r_i)}(x_1, x_2, \cdots, x_{n_i}))$$

$$P_i = (p_i^{(1)}, p_i^{(2)}, \cdots, p_i^{(r_i)})$$

并且 $1 \le r_i \le 2^{2^{n_i}}$，$\sum_{j=1}^{r_i} p_i^{(j)} = 1$。当 $1 \le j \le r_i$ 时，$p_i^{(j)} > 0$，$f_i^{(1)}(x_1, x_2, \cdots, x_{n_i}) = f_i^{(0)}(x_1, x_2, \cdots, x_{n_i})$ 为函数元 F_i 在正常状态下实现的函数。称该分布式为 F_i 的函数概型。

定义 4　将系统 Σ 发生故障的概率称为 Σ 的不可靠度，以 $Q(\Sigma)$ 表示；系统在某一输入数组 $\tilde{\sigma}$ 激励下发生错误的概率称为 Σ 在 $\tilde{\sigma}$ 下的不可靠度，以 $Q(\Sigma, \tilde{\sigma})$ 表示；相应地，Σ 的可靠度分别表示为 $1 - Q(\Sigma)$ 和 $1 - Q(\Sigma, \tilde{\sigma})$。

对单元 F_i 和 B 设置常数 p_B 如下

$$p_B = \min_{i, F_i \in B} p_{\min}^{(i)}, \quad p_{\min}^{(i)} = \min_{1 \le j \le r_i} p_{\min}^{(j)} \tag{2}$$

定义 5　设存在某一故障源，并且在其作用下 B 中的单元 F_i 具有函数概型(1)，其中 $r_i = 2^{2^{n_i}}$，则称该故障源为 Neuman 故障源，记为 S_N。

研究表明，在 S_N 作用下，B 中任何系统 Σ 的不可靠度都满足 Neuman 定理，即 $Q(\Sigma) \ge p_B$，其中 p_B 为式(2)所定义的常数。

3　具有实输入数组的故障源模型及系统可靠性的下界估计

从上面分析可以看出，对满足 Neuman 定理的 Neuman 故障源而言，在其作用下的单元 F_i 应实现所有可能的 n_i 元二值函数，即 $2^{2^{n_i}}$ 个函数。显然，这是一个很严格的条件。事实上，这一条件是可以减弱的。

定义 6　称某一故障源为具有实输入数组的故障源，如果在其作用下系统 Σ 中的每个单元 F_i 满足如下条件：在任意输入数组 $\tilde{\sigma}(\tilde{\sigma} \in B^{n_i})$ 的激励下，集合 G_i 中都存在函数 $f_i^{(j)}$ 和 $f_i^{(k)}(j \ne k, 1 \le j, k \le r_i)$ 且满足

$$f_i^{(j)}(\tilde{\sigma}) = 0, \quad f_i^{(k)}(\tilde{\sigma}) = 1 \tag{3}$$

通常将具有实输入数组的故障源简称为实故障源，并表示为 S_R。

由于在所有的 n_i 元二值函数中一定存在满足定义 6 条件的函数，所以 Neuman 故障源可归结为实故障源的特殊情形。下面将证明，实故障源满足下述可靠性估计定理：

定理 1　在实故障源 S_R 的作用下，任何由 B 中的单元构成的系统 Σ 的不可靠度满足

$$Q(\Sigma) \ge p_B \tag{4}$$

证明　设系统 Σ 在正常状态下输出 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，将单元 F_i 作为 Σ 的输出单元。用 S_φ 表示由除单元 F_i 以外的所有 Σ 的单元构成的子系统，并将 S_φ 的输出端作为 F_i 的输入端。设 $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 为系统 Σ 的任意输入数组，且在 $\tilde{\alpha}$ 的激励下，S_φ 输出的数组为 $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_i})$，如图 1 所示。

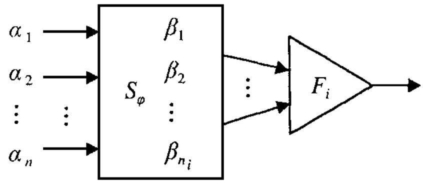

图 1　实故障源作用下的系统

设 $f(\tilde{\alpha}) = \eta(\eta \in \{0, 1\})$。用概率理论分析系统 Σ 在输入数组 $\tilde{\alpha}$ 上的可靠性，得到下列关系式

$$Q(\Sigma, \tilde{\alpha}) = \sum_{\tilde{\beta}} p_{\tilde{\beta}}^{S_\varphi}(\tilde{\alpha}) p_{\bar{\eta}}^{F_i}(\tilde{\beta}) \tag{5}$$

其中 $Q(\Sigma, \tilde{\alpha})$ 表示在输入数组 $\tilde{\alpha}$ 的激励下，系统 Σ 的输出发生错误的概率，即输出值为 $\bar{\eta}$ 的概率（$\bar{\eta}$ 表示 η 的逻辑非）；$p_{\tilde{\beta}}^{S_\varphi}(\tilde{\alpha})$ 表示在输入数组 $\tilde{\alpha}$ 的激励下，子

系统S_φ输出数组$\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_i})$的概率; $p_{\eta}^{F_i}(\tilde{\beta})$表示在输入数组$\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_i})$的激励下, 单元$F_i$输出逻辑值$\eta$的概率, 即单元$F_i$输出函数$f_i^{(j)}(x_1, x_2, \cdots, x_{n_i})$且$f_i^{(j)}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_i}) = \eta$的概率。显然

$$\sum_{\tilde{\beta}} p_{\tilde{\beta}}^{S_\varphi}(\tilde{\alpha}) = 1, \quad p_{\eta}^{F_i}(\tilde{\beta}) = p_i^{(j)} \geq p_B$$

由式(5) 得

$$Q(\Sigma, \tilde{\alpha}) = \sum_{\tilde{\beta}} p_{\tilde{\beta}}^{S_\varphi}(\tilde{\alpha}) p_{\eta}^{F_i}(\tilde{\beta}) \geq p_B \sum_{\tilde{\beta}} p_{\tilde{\beta}}^{S_\varphi}(\tilde{\alpha}) = p_B$$

这表明, 在任意输入数组激励下, 系统Σ的输出发生错误的概率不可能小于p_B。系统发生故障表明它至少在一个输入数组的激励下输出值发生错误, 考虑到Σ共有2^n个输入数组, 设为$\tilde{\alpha}(i = 1, 2, \cdots, 2^n)$, 则利用上述结果可得

$$Q(\Sigma) = 1 - \prod_{i=1}^{2^n} (1 - Q(\Sigma, \tilde{\alpha})) \geq 1 - (1 - p_B)^{2^n} \geq p_B$$

(证毕)

4 实故障源的特例

4.1 故障源 $S_{(0,1)}$

如果存在某一故障源, 在其作用下基底B中的任意单元F_i的函数模型G_i中含有0和1两个常值函数, 即

$$G_i = (f_i^{(1)}(x_1, \cdots, x_{n_i}), \quad f_i^{(2)}(x_1, \cdots, x_{n_i}), \cdots, 0, \cdots, 1, \cdots, f_i^{(r_i)}(x_1, \cdots, x_{n_i}))$$

则由定义(6) 知, 该故障源为实故障源, 用$S_{(0,1)}$来表示。由上述可靠性估计定理可得如下推论:

推论 1 在故障源$S_{(0,1)}$作用下, B上的任何系统Σ的不可靠度都满足$Q(\Sigma) \geq p_B$。

4.2 故障源 $S_{(\neg)}$

如果存在某一故障源, 在其作用下基底B中的任意单元F_i的函数模型G_i中含有某一函数和它的逻辑非, 即

$$G_i = (f_i^{(1)}(x_1, \cdots, x_{n_i}), f_i^{(2)}(x_1, \cdots, x_{n_i}), \cdots, f_i^{(j)}(x_1, \cdots, x_{n_i}), \cdots, f_i^{(k)}(x_1, \cdots, x_{n_i}), \cdots, f_i^{(r_i)}(x_1, \cdots, x_{n_i}))$$

其中$f_i^{(j)}(x_1, \cdots, x_{n_i}) = \overline{f_i^{(k)}}(x_1, \cdots, x_{n_i})$, 则由定义(6) 知, 该故障源为实故障源, 用$S_{(\neg)}$来表示。显然有如下推论:

推论 2 在故障源$S_{(\neg)}$作用下, B上的任何系统Σ的不可靠度都满足$Q(\Sigma) \geq p_B$。

4.3 故障源 $S_{(1/2)}$

如果存在某一故障源, 在其作用下基底B中任意单元F_i的函数模型G_i中所包含的函数总数大于所有n_i元二值函数总数的一半, 即$r_i > 2^{2^{n_i}-1}$, 则它是实故障源。事实上, 由于包含超过函数总数一半的G_i中一定含有某一函数和它的逻辑非, 因此这种故障源是$S_{(\neg)}$的特例, 用$S_{(1/2)}$来表示。于是有如下推论:

推论 3 在故障源$S_{(1/2)}$作用下, B上的任何系统Σ的不可靠度都满足$Q(\Sigma) \geq p_B$。

5 结 语

本文建立了具有实输入数组的故障源模型, 可靠性估计定理给出了在这类故障源作用下系统可靠性的评估。如果所观察的基底的集合满足该定理, 则在研究该基底上系统的不可靠性时, 这一定理给出了一个正的下界限。在工程实践中, 该下界限值是一个很有价值的参考点。当针对某一具体函数需要在上述基底上构造不可靠的系统时, 应尽量使系统的不可靠度趋向这一值, 即保证其尽可能小, 当达到所要求的精度时, 便可认为问题得以解决。关于系统构造的方法及其复杂性评价等问题, 还需要进一步研究。

参 考 文 献

1 Von Neuman J. Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components. In: Automata Studies. Princeton University Press, 1956

2 Jablonski S V. Reliability of the control system. In: Methodical Elaboration on Course of Cybernetics Element. Moscow: Moscow State University Press, 1991

3 Deng B X, Loznkin S A. Study on behavior of the system consisting of functional elements. In: Proc of the 2nd Int Conf on Discrete Models in Control System Theory. Moscow: Moscow Dialogue-MSU, 1997. 25～26

作 者 简 介

邓北星 男, 1964 年生。1997 年在莫斯科国立大学获数学物理博士学位, 现任清华大学电子工程系讲师。研究方向为控制系统的可靠性, 电磁兼容性的理论, 网络安全研究等。

S A Lozhkin 男, 1954 年生。数学物理科学博士, 现任莫斯科国立大学计算数学与控制论学院教授。主要从事控制系统的可靠性, 网络系统综合及复杂性研究。