第 15 卷 第 6 期　　控 制 与 决 策　　2000 年 11 月
Vol. 15 No. 6　　CONTROL AND DECISION　　Nov. 2000

一类模糊系统全局稳定的几个充分条件*

何希勤　（鞍山钢铁学院数理系　114000）
黎　明　张化光　（东北大学信息科学与工程学院）
李玉亮　（西宁钢厂发展规划处）

摘　要　针对一类多变量连续 T-S 模糊模型，通过对全局系统性质的研究，提出一种基于线性时不变系统的全局稳定性分析方法，并得到该类模糊系统的全局稳定的几个充分条件。该方法为模糊控制的稳定性研究提供了新途径。

关键词　T-S 模糊模型，线性时不变系统，全局稳定

分类号　TP 273

Sufficient Conditions for Global Stability of a Class of Fuzzy Systems

He Xiqin　(Anshan Institute of Iron and Steel)
Li Ming, Zhang Huaguang　(Northeastern University)
Li Yuliang　(Xining Steel Factory)

Abstract　An approach for global stability analysis based on T-S fuzzy model is proposed. The sufficient conditions for global stability of the fuzzy systems are given.

Key words　T-S fuzzy model, linear time-invariant systems, global stability

1　引　言

稳定性是控制系统的一个重要的性能指标。在早期的模糊控制系统稳定性研究中，人们针对各自定义的模糊系统进行分析和研究，并没有统一的判断标准，因此得到的结论具有一定的特殊性[1~3]。近期的模糊控制系统的研究大多基于语言模糊模型，其中 Takagi 和 Sugeno 提出的 T-S 模型为模糊控制的理论研究及应用带来了深刻的影响[4]。文献[5]基于 T-S 模型和分段多项式隶属函数，引入了方块图的概念，利用模糊方块图进行系统设计和稳定性分析，导出了基于 Lyapunov 直接方法的保证模糊系统稳定的充分条件。随后，[6, 7] 将上述结果推广到 T-S 模糊系统的鲁棒控制问题及一类非线性系统的鲁棒稳定问题。[8] 在定义了与 T-S 模型等价的开关系统后，导出了该类模糊系统全局渐近稳定的充要条件。然而，上述稳定性分析的最大局限性在于如何判定公共的正定矩阵 P 的存在问题。

本文基于 T-S 模型，通过对全局系统性质的分析，提出一种基于线性时不变系统的稳定性分析方法，并得到了模糊系统全局稳定性的几个充分条件。

2　系统描述

考虑由以下 n 条规则构成的模糊控制系统

$$R_i: \text{if } x_1 \text{ is } A_1^i \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^i \text{ and } \cdots \text{ and } x_n \text{ is } A_n^i \text{ then } \mathring{x} = A_i x \tag{1}$$

其中，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$A_i$ 是常数阵。

由上述 n 条规则（亦称 n 个子系统）构成的 T-S 模糊模型，通过中心平均反模糊化、乘积推理和单点模糊化方法，可得到系统全局模型

$$\mathring{x} = Ax \tag{2}$$

式中

---

* 国家教委博士点基金项目(9514518) 和鞍山钢铁学院董事会基金项目(1372503)

1999-11-13 收稿，2000-03-16 修回

$$A = \sum_{i=1}^{m} \epsilon(x(t)) A_i$$

$$\epsilon = W^i(t) \Big\backslash \sum_{i=1}^{n} W^i(t)$$

$$W^i(t) = \prod_{j=1}^{n} \mu_{A_j^i}(x)$$

$\mu_{A_j^i}$ 表示模糊集 A_j^i 的隶属函数

在系统(2) 中, ϵ 满足: 1) $0 \le \epsilon \le 1$; 2) $\sum_{i=1}^{n} \epsilon = 1$。不妨设 $A_k = (a_{ij}^k), k = 1, 2, \cdots, n$, 令

$$\underline{A} = (\underline{a}_{ij}) = \min_k (a_{ij}^k)$$

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij}) = \max_k (a_{ij}^k)$$

于是

$$A \triangleq \sum_{i=1}^{n} \epsilon A_i \in [\underline{A}, \bar{A}]$$

这样, 将系统(2) 等价写成

$$\mathring{x} = (\underline{A} + \Delta \underline{A}(t)) x(t) \tag{3}$$

对于线性时不变系统 $\mathring{x} = A_0 x$, 不加证明地给出以下性质:

1) 若系统的每一解在 $0 \le t \le \infty$ 上有界, 则系统的每个解均为稳定的;

2) 若系统的每一解在 $t \to \infty$ 时趋于平衡态原点, 则系统的每个解均是渐近稳定的。

注 1 系统(2) 是一种线性时不变系统的加权组合, 它本质上是非线性系统。

注 2 为方便起见, 本文选择左区间矩阵并假定它稳定。其实, $\underline{A}$ 可以为区间矩阵中任意稳定阵。

3 稳定性分析

引理 1[9] 设在区间 $[x_0, x_1]$ 上给定 3 个连续函数 $u(x)$, $\varphi(x)$ 和 $\lambda(x) \ge 0$, 且满足微分不等式

$$u(x) \le \int_0 \lambda(t) u(t) \mathrm{d}t + \varphi(x), \quad x_0 \le x \le x_1$$

则有

$$u(x) \le \varphi(x_0) \mathrm{e}^{\int_0^x \lambda(t) \mathrm{d}t} + \int_0^x \mathrm{e}^{\int_0^x \lambda(t) \mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t$$

$$x_0 \le x \le x_1$$

由引理 1, 容易得到如下结果:

推论 1 若 $|f(x)| \le c + k \int |g(t)| |f(t)| \mathrm{d}t$, 其中 $c, k \ge 0$ 成立, 则有 $|f(x)| \le c \mathrm{e}^{k \int_x |g(t)| \mathrm{d}t}$。

为了得到系统(2) 或(6) 的稳定性条件, 现做如下假设:

假设 1 $\Delta \underline{A}(t)$ 在 $t \ge 0$ 上是连续矩阵函数, 且 $\int^\infty \| \Delta \underline{A}(t) \| \mathrm{d}t < \infty$。

假设 2 线性时不变系统

$$\mathring{x} = \underline{A} x \tag{4}$$

的一切解在 $t \ge 0$ 上保持有界。

定理 1 在上述假设条件下, 系统(2) 或(3) 的一切解在 $t \ge 0$ 上均保持有界且稳定。

证明 系统(3) 满足初始条件 $x(t_0) = x_0$ 的解可表示为

$$x(t) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) x_0 + \int_0 \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) \Delta \underline{A}(\tau) x(\tau) \mathrm{d}\tau$$

其中, $t \ge 0$, $\Phi(t)$ 是式(4) 满足条件 $\Phi(0) = I$ 的基本矩阵。

因为系统(4) 的一切解在 $t \ge 0$ 上均保持有界, 而 $\Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) x_0$ 是式(4) 的满足同一初始条件 $x(t_0) = x_0$ 的解, 故 $\exists M > 0$, 使得

$$\| \Phi(t) \| \| \Phi^{-1}(t_0) \| \| x_0 \| \le M \| x_0 \|$$

$$\| \Phi(t) \| \| \Phi^{-1}(\tau) \| \le M \| x_0 \|, \quad t \ge 0$$

故有

$$\| x(t) \| \le \left(M + M \int_0 \| \Delta \underline{A}(\tau) \| \| x(\tau) \| \mathrm{d}\tau \right) \| x_0 \|$$

由推论 1 知

$$\| x(t) \| \le M \mathrm{e}^{M \int_0 \| \Delta \underline{A}(\tau) \| \mathrm{d}\tau} \| x_0 \|$$

由已知条件知

$$M \int_0 \| \Delta \underline{A}(\tau) \| \mathrm{d}\tau < \infty$$

于是有

$$\| x(t) \| \le M \mathrm{e}^{Mh} \| x_0 \|, \quad t \ge 0$$

式中 h 为 $\int \| \Delta A(\tau) \| \mathrm{d}\tau$ 的上界。从而

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta = \epsilon / M \mathrm{e}^{Mh}$$

当 $\| x_0 \| < \delta$ 时, 有

$$\| x(t) \| \le M \mathrm{e}^{Mh} \| x_0 \| \le M \mathrm{e}^{Mh} \frac{\epsilon}{M \mathrm{e}^{Mh}} = \epsilon$$

故系统(2) 或(3) 全局稳定。(证毕)

定理 2 若系统(2) 可等价描述成

$$\mathring{x} = \underline{A} x + B(t, x) \tag{5}$$

式中, $\underline{A}$ 为常数阵; $B(t, x)$ 在 $t \ge t_0$, $\| x \| < H$ 上连续, 且 $\| B(t, x) \| \le \alpha(t) \| x \|$, $B(t, 0) \equiv 0$; $\alpha(t)$ 是 $t \ge t_0$ 上非负连续函数, 且 $\int_0 \alpha(t) \mathrm{d}t < \infty$。则当式(4) 的一切解在 $t \ge t_0$ 上有界时, 式(5) 的零解是稳定的。

证明　由常数变易法知，当 $x(t_0) = x_0$ 充分小时，方程(5) 的解可表示为

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_0 \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)B(\tau, x(\tau))\,d\tau \qquad (6)$$

其中 $\Phi(t)$ 是式(4) 满足条件 $\Phi(0) = I$ 的基本矩阵。由假设 2，式(4) 的一切解保持有界，故 $\exists\, M > 0$，使得

$$\begin{aligned} &\|\Phi(t)\|\,\|\Phi^{-1}(t_0)\|\,\|x_0\| \le M \\ &\|\Phi(t)\|\,\|\Phi^{-1}(\tau)\| \le M, \quad t \ge t_0 \end{aligned} \qquad (7)$$

成立。再由式(6) 及已知条件可得

$$\|x(t)\| \le M\|x_0\| + M\int_0 \alpha(\tau)\,\|x(\tau)\|\,d\tau \qquad (8)$$

故有

$$\|x(t)\| \le M\|x_0\|\,e^{M\int_0 \|\alpha(\tau)\|\,d\tau}, \quad t \ge t_0 \quad (9)$$

因为 $\int_0^{\infty} \alpha(t)\,dt < \infty$，所以

$$\int_0 \alpha(t)\,dt < R, \quad t \ge t_0$$

于是

$$\|x(t)\| \le M\|x_0\|\,e^{MR}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta = \frac{\epsilon}{M e^{MR}}$$

当 $\|x_0\| < \delta$ 时，$\|x(t)\| < \epsilon, t \ge t_0$，即系统(5) 零解是稳定的。

4　结　　语

模糊系统的稳定性分析一直是模糊控制理论中的难点之一。本文就一类 T-S 模糊模型，通过对全局系统性质的分析，基于线性时不变子系统，给出了模糊系统全局稳定的充分条件。由于全局系统是 n 个子系统的凸组合，尽管系统的状态方程是非线性时变的，但它是一种区间动力系统。因此，对于这类模糊系统稳定性研究，还可以结合区间动力系统稳定性进行分析。它为模糊控制的稳定性研究提供了新的途径。

参 考 文 献

1　Pedrycz W. An approach to the analysis of fuzzy systems. Int J Contr, 1981, 31: 413～421

2　R M Tong. Analysis and control of fuzzy systems using the relation matrix. Int J Contr, 1980, 10: 327～330

3　Kiszka J B, Gupta M M. Energetistic stability of fuzzy dynamic systems. IEEE Trans on Systems, 1985, 15(5): 583～792

4　T Takagi, M Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. IEEE Trans on SMC, 1985, 15(1): 116～132

5　K Tanaka, M Sugeno. Stability analysis and design of fuzzy control systems. Fuzzy Sets and System, 1992, 45: 135～156

6　H O Wang, K Tanaka, M F Griffin. An approach to fuzzy control nonlinear systems: Stability and design issues. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1996, 4(1): 14～24

7　K Tanaka, H O Wang. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stability, control theory and linear matrix inequalities. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1996, 4(1): 1～14

8　M A L Tharhachar. On the stability of fuzzy systems. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1997, 5(1): 145～151

9　叶彦谦. 常微分方程讲义. 北京: 高等教育出版社, 1981

作 者 简 介

何希勤　男，1965 年生。鞍山钢铁学院数理系副教授，博士。研究方向为模糊系统和区间动力系统的稳定性。

黎　明　男，1975 年生。东北大学在读博士研究生。研究方向为模糊集和粗糙集理论及其在控制中的应用。

张化光　男，1959 年生。东北大学教授，博士生导师。研究方向为模糊控制，智能控制，非线性控制。

李玉亮　男，1973 年生。1995 年于东北大学获学士学位，现在西宁钢厂发展规划处工作。