第 15 卷 第 6 期　　控　制　与　决　策　　2000 年 11 月
Vol. 15 No. 6　　CONTROL AND DECISION　　Nov. 2000

非线性调节器的进一步结果及鲁棒性分析*

谢世杰　于　茜　吴旭光　徐德民
(西北工业大学航海工程学院　西安　710072)

摘　要　利用返回差条件,借助配方方法讨论非线性系统达到最优调节所必须满足的充要条件。通过解 Hamilton-Jacobi 方程获得一种新的非线性最优调节设计方法,并证明该方法对模型的不确定性具有较强的鲁棒性。仿真结果验证了该设计方法的有效性。

关键词　返回差条件,Hamiltonian-Jacobi 方程,最优调节
分类号　TP 13

Further Results of Nonlinear Regulator and Robustness Analysis

Xie Shijie, Yu Qian, Wu Xuguang, Xu Demin
(Northwestern Polytechnical University)

Abstract　A necessary and sufficient condition for nonlinear systems to achieve optimal regulator is given by using the return difference condition and completion of the squares argument. A new design method is proposed for optimal regulator via solving Hamiltonian-Jacobi equation. The robustness to model uncertainty is proved. A simulation example shows that this method is useful and efficient.

Key words　return difference condition, Hamiltonian-Jacobi equation, optimal regulation

1　引　　言

调节与跟踪是控制系统分析与设计中两个经典问题,而跟踪问题又可转化为调节问题。因此,研究调节问题具有典型意义。以线性调节问题为例[1],对于线性时不变系统,如果经过适当设计得到一个状态反馈,它对二次性能指标是最优的充要条件是必须满足返回差条件。对于非线性系统,至今没有如线性调节理论那样完善的结果。文献[2]给出一个反馈控制律是最优调节的充要条件,但并未给出具体的设计方法。

本文从目前研究较为热门的 L_2 增益最优控制问题出发,借助于返回差条件,获得非线性最优调节和 L_2 增益最优控制统一的结果。

2　问题描述

考虑下列平滑仿射非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{1}$$

$$y = h(x) \tag{2}$$

其中,$x \in R^n$ 是状态向量,$u \in R^m$ 是输入或控制向量;函数 $f(\cdot), g(\cdot), h(\cdot)$ 充分平滑,即 $f(x) \in C^\infty$, $g(x) \in C^\infty, h(x) \in C^\infty$。假设系统有一平衡点,不失一般性,取平衡点为原点,即 $f(0) = 0, h(0) = 0$。

基于传统的认识,仍认为在性能指标中控制项 u 是二次的。这样,追求性能指标最优也就意味着控制能量是最优的。另外,假定与状态有关的项 $h(x) \geq 0$。

综合上述讨论,可取性能指标为

* 国家自然科学基金项目(69874032)和国防科技重点实验室基金项目(99JS26.7.1.ZS2604)
1999-09-13 收稿,1999-12-21 修回

$$J[x(t_0),u(0),t_0,T]=\int_0^T[u^T(t)u(t)+h(x)]\,dt \tag{3}$$

为了便于推导,不妨做如下假设:

1) 系统(1) 是完全可控的,即对任何初始状态 x_0 和任意状态 x_1,存在一个平方可积的 $u(\cdot)$ 和一个时间 t_1,使得 $x(t_1)=x_1$。

2) 自由系统 $\dot{x}=f(x)$, $y=h(x)$ 完全可观,即当 $h(x)=0$ 时蕴含着 $x=0$。

根据 Willems 的耗散动态系统理论[2],系统在支持率 $S=\frac{1}{2}(\gamma^2\|u\|^2-\|y\|^2)$ 的情形下为耗散的,是指存在一个函数 $V(x):R^n\to R(V(x)\geq 0$, $V(0)=0$, 称为储备函数),使得

$$V(x(t_1))-V(x(t_2))\leq \frac{1}{2}\int_0^1(\gamma^2\|u\|^2-\|y\|^2)\,dt \tag{4}$$

此时称系统(1) 具有小于或等于 γ 的 L_2 增益。

根据文献[3],如果假设 $V(x)$ 是连续可微的,则有

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)(f(x)+g(x)u)\leq \frac{1}{2}(\gamma^2\|u\|^2-\|y\|^2) \tag{5}$$

由式(5) 不难推得 $V(x)$ 满足 Hamilton-Jacobi 方程

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x)+\frac{1}{2}\|y\|^2\leq \frac{1}{2}\gamma^2\left\|u-\frac{1}{\gamma^2}g^T\frac{\partial^T V}{\partial x}(x)\right\|^2-\frac{1}{2}\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x)g^T(x)\frac{\partial^T V}{\partial x}(x)$$

取 $u=\frac{1}{\gamma^2}g^T(x)\frac{\partial^T V}{\partial x}(x)$,则有

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x)+\frac{1}{2}h^T(x)h(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x)g^T(x)\frac{\partial^T V}{\partial x}(x)=0 \tag{6}$$

总之,如果有一个 $V(x)$ 满足 Hamilton-Jacobi 方程,则系统具有小于或等于 γ 的 L_2 增益,最优控制律为 $u=\frac{1}{\gamma^2}g^T(x)\frac{\partial^T V}{\partial x}(x)$。

定义 1[1] 一个状态函数 $K(x)$ 满足返回差条件(RDC),是指当 $x(t_0)=0$ 时,不等式

$$\int_0^\infty[u+K(x)]^2[u+K(x)]\,dt\geq \int_0^\infty u^T(t)u(t)\,dt \tag{7}$$

成立。

由下列引理可知,返回差条件在最优调节理论中起着关键性作用。

引理 1[2] 对于系统(1),使系统渐近稳定的控制律 $u=K(x)$ 对性能指标(7) 是最优的,当且仅当 $K(x)$ 满足返回差条件。

3 主要结果

定理 1 对于系统(1) 及相应的性能指标(3), L_2 增益最优控制律和最优调节律互为等价。

证明 设有一 L_2 增益控制律为 $u=\frac{1}{\gamma^2}g^T(x)\cdot\frac{\partial^T V}{\partial x}(x)$,则

$$\int_0^\infty\left[u+\frac{1}{\gamma^2}g^T(x)\frac{\partial^T V}{\partial x}\right]^T\cdot\left[u+\frac{1}{\gamma^2}g^T(x)\frac{\partial^T V}{\partial x}\right]dt-\int_0^\infty u^T(t)u(t)\,dt=\int_0^\infty 3\left\|\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}g(x)\right\|^2dt>0$$

故

$$\int_0^\infty\left[u+\frac{1}{\gamma^2}g^T(x)\frac{\partial^T V}{\partial x}\right]^T\cdot\left[u+\frac{1}{\gamma^2}g^T(x)\frac{\partial^T V}{\partial x}\right]dt>\int_0^\infty u^T(t)u(t)\,dt$$

即 L_2 增益最优控制律是最优调节律。

根据假设 2),存在一个平滑的 $V(x):R^n\to R^+$ 满足 Hamilton-Jacobi 方程,即有

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x)\times g^T(x)\frac{\partial^T V}{\partial x}(x)+\frac{1}{2}h^T(x)h(x)=0 \tag{8}$$

则

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x)+\frac{\partial V}{\partial x}gu=-\frac{1}{2}\gamma^2\left\|u-\frac{1}{\gamma^2}g^T\frac{\partial^T V}{\partial x}\right\|^2+\frac{\partial V}{\partial x}f(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}gg^T\frac{\partial^T V}{\partial x}+\frac{1}{2}\gamma^2\|u\|^2 \tag{9}$$

将式(8) 带入式(9),得

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x)+\frac{\partial V}{\partial x}gu\leq -\frac{1}{2}\gamma^2\left\|u-\frac{1}{\gamma^2}g^T\frac{\partial^T V}{\partial x}\right\|^2-\frac{1}{2}\|y\|^2+\frac{1}{2}\gamma^2\|u\|^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x)+\frac{\partial V}{\partial x}gu\leq$$
$$-\frac{1}{2}\|y\|^2+\frac{1}{2}\gamma^2\|u\|^2$$

对上式积分, 有

$$V(x(t_1))-V(x(t_0))\leq$$
$$\frac{1}{2}\int_0^t(\gamma^2\|u\|^2-\|y\|^2)\,\mathrm{d}t$$

它蕴涵着系统具有小于或等于 γ 的 L_2 增益, 故也是 L_2- 增益最优控制器。(证毕)

按上述方法设计的调节器其实并不具有鲁棒性, 而对象的误差总存在, 所以还必须考虑模型具有摄动误差时的情形。

假设对象(1) 具有如下摄动形式

$$\mathring{x}=f(x)+\Delta f(x)+g(x)u \tag{10}$$

不确定性[5]

$$\Delta f(x)=g(x)p(x) \tag{11}$$

由于 x 是不确定性系统的状态轨迹, 故可进一步假设

$$\begin{cases} p(x)=\alpha g^{\mathrm{T}}(x)\dfrac{\partial^{\mathrm{T}}V}{\partial x}(x) \\ \|p(x)\|^2\leq\beta h^{\mathrm{T}}(x)h(x)\end{cases} \tag{12}$$

其中, $\alpha>0$, $\beta>0$。

定理 2　摄动系统(10) ～(12), 当 $\alpha>\frac{\sqrt{2}+1}{\gamma^2}$, $\beta<\frac{2}{\gamma^2}$ 时, 最优控制律和最优调节律相互等价。

证明　显然, 只须证明当 $\alpha>\frac{\sqrt{2}+1}{\gamma^2}$, $\beta<\frac{2}{\gamma^2}$ 时原系统的 $V(x)$ 对于系统(10) ～(12), 仍满足 $\mathring{V}(x)<0$ 即可。由于

$$\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial x}(x)[f(x)+g(x)(u+p(x))]\leq$$
$$\left[-\frac{\gamma^2}{2}\left(\alpha-\frac{1}{\gamma^2}\right)^2+\frac{1}{\gamma^2}\right]\frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x)\times$$
$$g^{\mathrm{T}}(x)\frac{\partial^{\mathrm{T}}V}{\partial x}(x)+\left(\frac{\gamma^2}{2}\beta-1\right)h^{\mathrm{T}}(x)h(x)$$

如果 $\alpha>\frac{\sqrt{2}+1}{\gamma^2}$, $\beta<\frac{2}{\gamma^2}$, 则 $\dot{V}(x)<0$, 因此系统是李雅普诺夫意义下稳定的。

根据假设 2) 和 Lashale 不变集原理[3], 系统是渐近稳定的。(证毕)

4　仿真算例

考虑系统

$$\mathring{x}=-x^3+u,\quad y=x^3$$

不难找到一个正定函数 $V(x)=x^4/4$, 它说明系统是耗散的, 且使 L_2 增益小于或等于 1。则 L_2 增益最优控制律为

$$u=\frac{1}{\gamma^2}g^{\mathrm{T}}(x)\frac{\partial^{\mathrm{T}}V}{\partial x}(x)=x^3$$

使得

$$\int_0^\infty(u+x^3)^{\mathrm{T}}(u+x^3)\,\mathrm{d}t\geq\int_0^\infty u^{\mathrm{T}}u\,\mathrm{d}t$$

成立, 故它是最优调节器。当输入为单位阶跃函数时, 系统及有摄动时的响应曲线如图 1 所示。

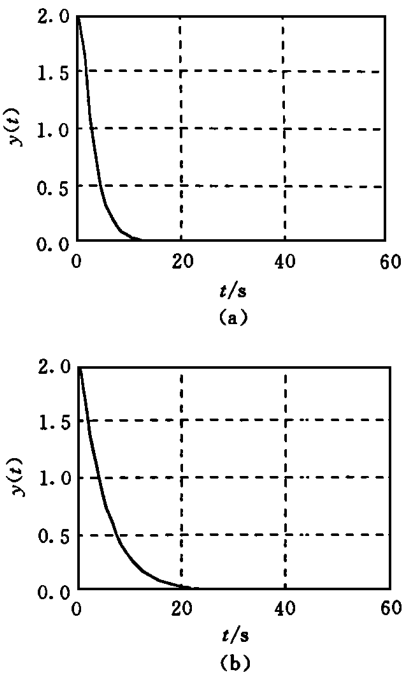

图 1　闭环系统的初始条件响应曲线

(a)　标称系统　　(b)　摄动系统

由仿真结果图 1(b) 可以看出, 因为模型误差导致系统需要较长时间才能趋于稳态。

5　结　　语

本文将最优调节和 L_2 增益最优控制的结果统一起来, 为非线性最优调节律设计拓展了一种新的设计方法。通过设计选择适当的输出函数, 达到了与线性调节器类似的结果。

(下转第 743 页)

参 考 文 献

1 赵子尧 . 一种提高数据传输速率的方法 . 见: 1986 年全国数据通信学术会议论文集 . 1986

2 张旭 . 在瞬态检测中用无失真滤波器抑制邻道干扰 . 东北大学硕士学位论文, 1999

3 张旭, 王永军 . 一种抑制邻道干扰的无失真滤波器方法. 控制与决策, 1999, 14(S): 621～624

作 者 简 介

王永军 男, 1946 年生。现为东北大学信息科学与工程学院教授。研究方向为电子技术应用、数字信号处理和图象处理。

史 捷 男, 1956 年生。现为沈阳铁路工程建设集团信息处理中心工程师。研究方向为计算机信息处理和计算机网络。

张 旭 男, 1963 年生。1999 年于东北大学获硕士学位, 现为沈阳军区指挥自动化站工程师。研究方向为无线通信。

陈 辉 男, 1971 年生。1995 年毕业于东北大学, 现为东北大学计算中心助理工程师。研究方向为多媒体技术。

(上接第 736 页)

参 考 文 献

1 Shuuji Kajita. Dynamic walking control of a biped robot along a potential energy conserving orbit. IEEE Trans on Robotics and Automation, 1992, 8(4): 431～437

2 P H Channon. Derivation of optimal walking motions for a bipedal walking robot. Robotica, 1992, 10(2): 165～172

3 W Thomas Miller Ⅲ. Real-time neural network control of a biped walking robot. IEEE Control System, 1994, 14(1): 41～48

4 刘志远. 双足机器人动态行走研究. 哈尔滨工业大学博士学位论文, 1991

5 纪军红. 造纸过程水分控制系统研究. 哈尔滨工业大学学士学位论文, 1994

作 者 简 介

麻 亮 男, 1969 年生。1998 年于哈尔滨工业大学获博士学位, 现在哈尔滨工业大学从事博士后研究。主要研究方向为机器人控制, 高精度伺服系统。

纪军红 男, 1972 年生。1996 年于哈尔滨工业大学获硕士学位, 2000 年获得博士学位。主要研究方向为机器人控制, 机器人学。

强文义 男, 1937 年生。1960 年毕业于哈尔滨工业大学电机系, 现为该校控制工程系教授, 博士生导师。主要研究方向为智能控制, 鲁棒控制, 过程控制。

傅佩琛 男, 1932 年生。1960 年毕业于哈尔滨工业大学控制工程系, 现为该校控制工程系教授。主要研究方向为机器人学, 机器人控制, 智能控制。

(上接第 739 页)

参 考 文 献

1 解学书. 最优控制理论. 北京: 清华大学出版社, 1987

2 J C Willems. Dissipative dynamical system. Arch Rat Mech Anal, 1972, 45: 321～393

3 Van Der Schaft A J. L_2-gain analysis of nonlinear system and nonlinear state feedback H^∞ control. IEEE Trans on AC, 1992, 37(6): 770－784

4 P J Moyland, Brain D O Anderson. Nonlinear regulator theory and inverse optimal control problem. IEEE Trans on AC, 1973, 18(5): 683－691

5 Liu J S. Robustness of optimal nonlinear regulators under actuator and additive perturbations. Control Theory and Advanced Technology, 1993, 8(4): 779～787

作 者 简 介

谢世杰 男, 1966 年生。1993 年于北京航空航天大学获硕士学位, 现为西北工业大学博士生。研究方向为非线性系统理论和鲁棒控制。

于 茜 女, 1976 年生。1997 年毕业于西北工业大学, 现为西北工业大学硕士生。研究方向为鲁棒控制。

吴旭光 见本刊 1999 年第 14 卷第 5 期第 437 页。

徐德民 见本刊 1993 年第 8 卷第 1 期第 218 页。