第 15 卷 第 6 期　　控 制 与 决 策　　2000 年 11 月
Vol. 15 No. 6　　CONTROL AND DECISION　　Nov. 2000

低阶 $\boldsymbol{H}_\infty$ 控制器设计的遗传算法方法*

代冀阳
(北京航空航天大学第七研究室　100083)

孙秀霞
(空军工程大学工程学院)

毛剑琴　林　岩
(北京航空航天大学第七研究室)

摘　要　提出一种采用遗传算法求解非凸优化问题的方法，通过这种方法可搜索到 H_∞ 控制器的最小阶次 k 及相应的参数 (X, Y)，进而设计出控制器。同已有的方法相比，所提出的方法是一种全局搜索方法。

关键词　遗传算法(GA)，线性矩阵不等式(LMI)，非凸优化，低阶 H_∞ 控制器

分类号　TP 13

Low-order H_∞ Controller Design Using Genetic Algorithms

Dai Jiyang
(Beijing University of Aeronautics & Astronautics)

Sun Xiuxia
(Air-force University of Engineering)

Mao Jianqin, Lin Yan
(Beijing University of Aeronautics & Astronautics)

Abstract　A new numerical method for solving the non-convex optimization problem using genetic algorithms is presented, by which the minimum oredr k of the H_∞ controller and a corresponding parameter pair (X, Y) can be effectively found. The obtained results are used to design a reduced-order H_∞ controller. The proposed approach is a global search one.

Key words　GA, LMI, non-convex optimization, low-order H_∞ controller

1　引　　言

低阶 H_∞ 控制器设计问题可表示为一组 LMI 加上一个矩阵秩条件[1,2]。因为矩阵秩的大小决定了低阶控制器的阶次，因而这实际上是一个在一组 LMI 约束条件下的矩阵最小秩问题。最小秩问题是一种非凸优化问题，目前还没有一般的解决方法，只有一些数值方法用于处理这类问题，如交替投影法[3] 等。但这些方法本质上都是依赖于起始点的局部算法，不能保证全局收敛性。

遗传算法(GA) 是一种模拟生物进化过程的计算模型，整个搜索不依赖于梯度信息，是一种有效的全局优化搜索算法，特别适用于处理传统寻优方法难以解决的复杂非线性寻优问题[4]。由于求解一组 LMI 约束下的矩阵最小秩问题是一种非线性、非凸优化问题，因此本文采用遗传算法来求解这类寻优问题，找到 H_∞ 控制器的最小阶次 k 及相应的参数 (X, Y)，进而设计出控制器。

2　基于 LMI 的低阶 $\boldsymbol{H}_\infty$ 控制器设计问题

考虑文献[1] 中式(1) 所描述的线性时不变连续动态系统，设计一个 k 阶控制器，使得闭环系统内稳定且从外部输入 w 到被控输出 z 的传递函数 $\|T_{zw}\|_\infty$ 小于给定的正数 γ。文献[1, 2] 给出了 H_∞ 次优控制器存在的充要条件：存在 k 阶 H_∞ 次优控制器等价于存在对称矩阵 $X > 0$ 和 $Y > 0$，使得

$$\begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} AX + XA^{\mathrm{T}} & XC_1^{\mathrm{T}} & B_1 \\ C_1X & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^{\mathrm{T}} & D_{11}^{\mathrm{T}} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (1)$$

---

*　高等学校博士学科点专项科研基金项目(9603)

1999 - 11 - 04 收稿，2000 - 01 - 17 修回

$$\begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} A^{T}Y + YA & YB_1 & C_1^{T} \\ B_1^{T}Y & -\gamma I & D_{11}^{T} \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3}$$

$$\mathrm{Rank}\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \leq n_p + k \tag{4}$$

其中, N_R 和 N_S 分别是(B_2^{T}, D_{12}^{T}) 和(C_2, D_{21}) 零空间的基, I 表示单位矩阵, n_p 为广义对象的阶次。给定一对可行解(X, Y), 则相应的全部 k 阶 H_∞ 次优控制器可用一组压缩矩阵参数化表示[1,2]。当 $0 < k < n_p$ 时, 因为秩条件(4) 在参数空间(X, Y) 是非凸的, 使得(X, Y) 的求解变得非常困难。在这种情况下, (X, Y) 的求解可描述成非凸优化问题: $\mathrm{MinRank}\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}$, 满足 LMI: (1) ～(3) 。

为便于遗传算法的应用, 可进一步将上述优化问题转化成另一种形式。定义目标函数

$$\varphi(X, Y) = \sum_{i=1}^{n_p - k} \lambda_i \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \tag{5}$$

其中, $\lambda_1(\cdot) \leq \cdots \leq \lambda_{n_p - k}(\cdot)$ 表示矩阵$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}$ 的$(n_p - k)$ 个最小特征值。于是, k 阶降阶控制器的综合便转化为如下非凸优化问题: $\mathrm{Min}\,\varphi(X, Y)$, 满足 LMI: (1) ～(3) 。因此, 存在 k 阶 H_∞ 次优控制器就等价于 $\varphi(X, Y)$ 的全局最小值为零。由于目标函数 $\varphi(X, Y)$ 是非凸的, 因而本文采用不依赖于起始点且具有全局搜索能力的遗传算法来求解此非凸优化问题。

3　采用遗传算法搜索最优解

下面讨论利用遗传算法求解满足一组 LMI 约束的最小秩问题的一般过程和步骤。

1) 编码: 因为实数编码的精度较高, 而且表示自然、直观, 因而本文采用实数编码方法。对于要搜索的两个矩阵参数(X, Y), 将其直接编码成个体 $P = [X \quad Y]$。

2) 产生初始群体: 令不等式(1) 和(2) 的左边分别小于 $-k_x\epsilon_x I$ 和 $-k_y\epsilon_y I$ (ϵ_x 和 ϵ_y 均为[0, 1] 上的随机数, k_x 与 k_y 均为调整系数) , 再联立式(3) 求解相应的 LMI。于是可以随机产生 N (N 为偶数) 组满足(1) ～(3) 的解(X, Y), 每组解构成一个个体 P_j ($j = 1, 2, \cdots, N$) , 可将这 N 个个体作为进化的初始群体。

3) 评价目标函数: 由上节关于最小秩优化问题的讨论, 定义适应度函数为

$$f = 1/[\varphi(X, Y) + \mathrm{eps}] \tag{6}$$

其中 eps 为很小的正数(如 10^{-16}) 。

4) 选择或复制: 根据每个个体适应度的大小, 在包含 N 个个体的群体中, 保留一个适应度最大的最佳个体 P_B, 不经遗传操作将其直接复制到下一代, 淘汰$(N/2 - 1)$ 个最差的个体, 并将剩余的 $N/2$ 个个体进行随机重排。

5) 交叉: 为了保证交叉后的个体仍能满足约束(1) ～(3) , 本文采用线性交叉策略产生$(N/2 - 1)$ 个子个体, 即

$$P_{Cj} = \alpha P_{j+1} + (1 - \alpha) P_j$$
$$j = 1, 2, \cdots, N/2 - 1 \tag{7}$$

其中 α 为[0, 1] 上的随机数。

6) 变异: 实数变异算子称为实数蠕变, 这相当于给原先的解加上一个随机扰动, 从而增强算法的搜索能力。在实数编码的遗传算法应用中, 变异是一个很重要的遗传算子, 直接影响到遗传算法的搜索性能。变异后的个体也应满足约束(1) ～(3) 。为此, 本文采用如下方式定义变异算子:

设 $P_{Mj} = [X_{Mj} \quad Y_{Mj}]$, $\quad P_{Cj} = [X_{Cj} \quad Y_{Cj}]$

$$\Delta P_{Mj} = [\Delta X_j \quad \Delta Y_j], \quad \beta_{Mj} = \begin{bmatrix} \beta_{xj} & 0 \\ 0 & \beta_{yj} \end{bmatrix}$$

其中, P_{Mj} 表示变异后的个体, P_{Cj} 表示交叉后的个体, ΔP_j 表示个体变化的增量, β_{xj} 和 β_{yj} 均为[-1, 1] 上的随机数。令

$$X_{Mj} = X_{Cj} + k_{M\beta}\beta_{xj}\Delta X_j$$
$$Y_{Mj} = Y_{Cj} + k_{M\beta}\beta_{yj}\Delta Y_j$$

其中 $k_{M\beta}$ 为调整系数, 它反映了个体变异时的变化范围; ΔX_j 和 ΔY_j 可通过求解这 3 个 LMI 确定。因此, 变异算子可定义为

$$P_{Mj} = P_{Cj} + k_{M\beta}\Delta P_{Mj}\beta_{Mj}$$
$$j = 1, 2, \cdots, N/2 - 1 \tag{8}$$

7) 构成子代群体: 将最佳个体 P_B 按上一步的变异策略进行 $N/2$ 次变异, 产生 $N/2$ 个子个体, 即

$$P_{Nj} = P_B + k_{N\beta}\Delta P_{Nj}\beta_{Nj}$$
$$j = 1, 2, \cdots, N/2 \tag{9}$$

式中各符号的含义与式(8) 类似。于是新的一代便由 P_{Mj} ($j = 1, 2, \cdots, N/2 - 1$) , P_{Nj} ($j = 1, 2, \cdots, N/2$) 和 P_B 组成, 新一代群体的规模仍保持为 N。

8) 结束条件: 当目标函数 $\varphi(X, Y) \leq \epsilon$时, 结束

一次遗传算法搜索; 当代次 $n \geq D$ 时, 结束整个算法。其中, ϵ表示给定精度, 为一很小的正数; D 表示最大允许进化的代次。

采用遗传算法求解最小秩问题时, 搜索从 $k = n_p - 1$ 开始。首先固定 k, 采用遗传算法搜索目标函数 $\varphi(X, Y) \leq \epsilon$时的参数$(X, Y)$, 若搜索到, 则 $k - 1$, 重复上一次搜索过程; 若经过 D 代进化仍未搜索到, 则说明对此 k 不存在满足目标函数 $\varphi(X, Y) \leq \epsilon$ 的最优解, 结束算法。上述算法可用图 1 所示的流程图表示。

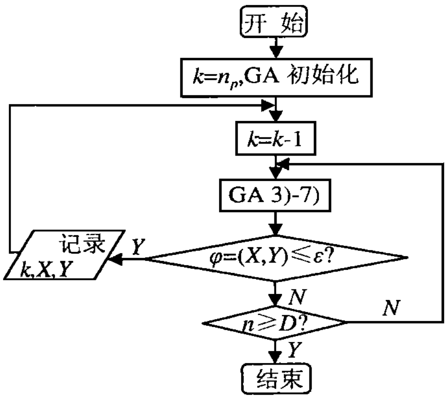

图 1 算法流程图

在每次利用遗传算法搜索最优解的过程中, 随着群体的不断进化, 最佳个体的目标函数不断减小。当搜索接近最优解邻域时, 反映搜索区域的两个参数 $k_{M\beta}$ 和 $k_{N\beta}$ 也相应随之减小, 从而提高了遗传算法的搜索精度和搜索速度。通过上述算法搜索到最优解(X, Y) 及控制器的阶次k后, 如果H_∞性能指标γ给定, 则可按文献[1] 中的方法设计控制器。

4 应用算例

考虑某变频调速电动机-发电机组的频率与幅值鲁棒控制器设计。对象的线性化数学模型为[5]

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1.6}{0.4s^2 + 8s + 16} & 0 \\ \dfrac{1.6 I_{F0}}{0.4s^2 + 8s + 1.6} & \dfrac{\omega_{E0}}{s + 1} \end{bmatrix}$$

其中, $I_{F0} = [0.2, 1.0]$, $\omega_{E0} = [0.2, 1.0]$。当 $I_{F0} = 0.2$, $\omega_{E0} = 0.2$ 时为标称对象。选取与文献[5] 相同的加权矩阵, 可先求出基于 LMI 的 5 阶最优 H_∞ 性能控制器, 得到的最优H_∞性能指标$\gamma_{opt} = 0.408$。对象在标称时和在参数扰动时, 闭环系统均具有良好的动态性能和解耦特性。

采用本文提出的算法进行该系统的低阶控制器设计时, 所取的参数如表 1 所示。在搜索控制器的最小阶次 k 及相应的参数(X, Y) 的过程中, 当 $k = 4$ 时, 只经过 13 代进化, 最佳个体的目标函数$\varphi(X, Y)$ 便达到 3.279×10^{-10}; 当 $k = 3$ 时, 经过 23 代进化, 最佳个体的目标函数$\varphi(X, Y)$ 达到 1.937×10^{-9}; 当 $k = 2$ 时, 从 27 代一直到 300 代, 最佳个体的目标函数 $\varphi(X, Y)$ 始终为 1.059。因此对于本例, 找不到低于 2 阶的 H_∞ 控制器, 搜索到的最低控制器阶次为 3。利用 $k = 3$ 及相应的(X, Y) 值即可设计出最优H_∞性能的 3 阶控制器。对象在标称时和在参数扰动时, 3 阶控制器都取得了与 5 阶控制器同样的控制效果。

表 1 算法中各参数取值

群体规模 N	选择概率 p_s	交叉概率 p_c	变异概率 p_m	给定精度 ϵ	最大允许代次 D
22	1	0.98	0.8	2×10^{-9}	300

5 结 语

本文针对低阶H_∞控制器设计中遇到的非凸优化问题, 提出一种基于遗传算法的低阶 H_∞ 控制器设计方法。此方法是利用遗传算法求解在一组 LMI 约束下的矩阵最小秩问题, 从而确定低阶控制器的最小阶次 k 及相应的参数(X, Y), 进而设计出控制器。由于遗传算法搜索的全局性, 因而该方法是一种不依赖于起始点的全局数值方法。仿真结果表明该方法是一种有效的低阶控制器设计方法。

参 考 文 献

1 Iwasaki T, Skelton R E. All controller for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. Automatica, 1994, 30(8): 1307～1371

2 Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. Int J Robust and Nonlinear Control, 1994, 4: 421～448

3 Grigoriadis K M, Skelton R E. Low order control design for LMI problems using alternating projection methods. Automatica, 1995, 32(8): 1117～1125

4 Zalzala A M S, Fleming P J. Genetic algorithms in engineering systems. London: The Institution of Electrical Engineers, 1997

5 Xiuxia Sun, Jianqin Mao, Chang T S. Application of H-infinity method to robust design for fast following synchronizer generators. In: Proc of ASCC. Seoul, 1997. 583～586

(下转第 752 页)