

# 变加权系数减小变结构系统抖振的设计方法\*

李 涛                      冯 勇 安澄全  
(清华大学自动化系 北京 100084)    (哈尔滨工业大学电气工程系)

**摘 要** 提出一种固定边界的变结构控制平滑方法,推导出变结构控制系统的稳态误差指标与边界内部加权系数之间定量的数学关系。通过系统的稳态误差指标可以设计出固定边界的平滑方法,从而既消除了系统的抖振又满足了对系统稳态误差指标的要求。仿真结果验证了该方法的有效性。

**关键词** 变结构系统,非线性系统,滑模平面,抖振  
**分类号** TP 13

## Chattering Free Method Using Fixed Boundary in VSS

*Li Tao*                      *Feng Yong, An Chengquan*  
(Tsinghua University)    (Harbin Institute of Technology)

**Abstract** A new method of chattering reduction in VSS is presented. The mathematical relationship between the steady-state errors and the time varying coefficients of softening method is derived. Different from the traditional trial and error method, the varying coefficient with fixed boundary can be designed through the given steady state errors, which can not only reduce the chattering in control signal but also simultaneously satisfy the specification of the steady state errors. The simulation results show the validity of the method.

**Key words** variable structure systems, nonlinear systems, sliding mode, chattering

## 1 引 言

变结构控制对系统的参数摄动及外部干扰具有很强的鲁棒性,但这种鲁棒性是以控制量的高频抖动换取的,这就是变结构控制系统中的抖振现象。在实际应用中,这样的变结构控制是无法实现的,因为这种高频抖振在理论上是无限快的,没有任何执行机构能够实现;同时,这样的高频输入很容易激发起系统的未建模特性,从而影响系统的控制性能。这种抖振现象是变结构控制应用的最大障碍。

Slotine<sup>[1,2]</sup>采用宽度变化的饱和特性来平滑控制量,但这种方法不能满足李亚普诺夫全局稳定性条件。Xu Jian-Xin<sup>[3]</sup>采用扇区特性平滑代替常规饱和特性平滑以消除抖振,同时减小系统的稳态误差。

但采用该方法控制时,状态轨迹距离平衡点越远,饱和和特性宽度越大,系统鲁棒性越差。Bartolini<sup>[4]</sup>设法使抖振发生在控制量的虚拟导数上以平滑控制量,但使系统失去了变结构系统特有的降阶特性。Pushkin<sup>[5]</sup>采用固定边界法代替常规饱和特性平滑以消除抖振,也取得了一定的效果。

以上方法都不能对系统的稳态误差做出定量的描述,系统稳态误差指标不能通过设计过程来保证,只能通过仿真或实验方法来试凑。为此,本文提出一种新的变结构控制设计方法,能够对系统稳态误差做出定量的描述,且在设计变结构控制系统时,既能满足平滑控制量的要求,又能满足稳态误差的要求。

## 2 一类非线性系统的变结构控制

为简便起见,本文仅讨论单输入单输出非线性系统的变结构控制问题。对这一问题的讨论结果可推广到一类多输入多输出非线性系统。考虑  $n$  阶系

\* 航天基金项目(GD9319)

统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = \theta^T \zeta(x, t) + (b_0(x, t) + \Phi \eta(x, t))u + d(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T \in R^n$  为系统可观测的状态向量,  $u$  为系统输入, 系统输出  $y(t) = x_1$ ,  $b_0(x, t)$  为已知函数,  $d(t)$  为系统所受界限已知的外界干扰;

$d_{\min} \leq d(t) \leq d_{\max}$ 。其余参数为

$$\begin{aligned} \theta &= [\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n]^T, & \Phi &= [\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_l]^T \\ \zeta(x, t) &= [\zeta_1(x, t) \zeta_2(x, t) \dots \zeta_l(x, t)]^T \\ \eta(x, t) &= [\eta_1(x, t) \eta_2(x, t) \dots \eta_l(x, t)]^T \end{aligned}$$

而  $\theta$  和  $\Phi$  为已知变化范围的系统参数, 且

$$\begin{aligned} \theta_{i, \min} \leq \theta_i \leq \theta_{i, \max}, & \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \Phi_{i, \min} \leq \Phi_i \leq \Phi_{i, \max}, & \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned}$$

$\zeta(x, t)$  和  $\eta(x, t)$  是关于状态向量和时间的非线性函数。

由假设可知, 系统可被分解为已知结构与不确定参数之积, 这些参数的范围都是已知的。设存在  $\lambda_0$  为满足  $\lambda_0 + \max | \Phi^T \eta(x, t) | \leq | b_0(x, t) |$  的最大正常实数, 则考虑变结构系统期望跟踪信号的描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_{d,i} = x_{d,i+1}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{d,n} = \rho(x_d, t) + r(t) \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $\rho(x_d, t)$  为已知函数,  $x_d = [x_{d,1} x_{d,2} \dots x_{d,n}]^T$  为系统的期望状态轨迹, 系统的期望输出信号  $y_d(t) = x_{d,1}$ 。定义系统的跟踪误差为  $e(t) = y(t) - y_d(t)$ ,  $r(t)$  为系统的参考输入。控制的任务是使系统输出  $y(t)$  跟踪期望输出信号  $y_d(t)$ 。

### 3 变结构控制系统变边界的饱和特性平滑方法

#### 3.1 变边界的饱和特性变结构控制系统分析

为使系统的状态变量跟踪期望状态轨迹, 实现变结构控制, 首先选取一滑模平面

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_{i=1}^n c_i (x_{d,i} - x_i) \\ c_n &= 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $c_i$  为霍尔维兹多项式的系数。设计滑模控制器必须满足滑模存在条件

$$SS \dot{S} < 0 \quad (4)$$

为方便叙述, 定义  $\hat{\theta}, \hat{\Phi}, \hat{d}$ ;  $\theta, \Phi, d$  分别为

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= (\theta_{\min} + \theta_{\max}) / 2 \\ \hat{\Phi} &= (\Phi_{\min} + \Phi_{\max}) / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{d} &= (d_{\min} + d_{\max}) / 2 \\ \hat{\theta} &= (\theta_{\max} - \theta_{\min}) / 2 \\ \hat{\Phi} &= (\Phi_{\max} - \Phi_{\min}) / 2 \\ \hat{d} &= (d_{\max} - d_{\min}) / 2 \end{aligned}$$

为保证满足滑模存在条件(4), 变结构控制取如下形式的控制量

$$u = u_{eq} + u_v \quad (5)$$

式中  $u_{eq} = (v - \hat{\theta}^T \zeta - \hat{d}) (b_0 + \hat{\Phi}^T \eta)^{-1}$ 。根据系统不确定性的上下限得到的平衡控制变量  $v$  为

$$v = \rho(x_d, t) + r + \sum_{i=1}^{n-1} c_i (x_{d,i+1} - x_{i+1}) \quad (6)$$

$u_v = k(x, t) \text{mat}(S(t), \alpha(t), \Phi)$  为系统的非线性控制项, 其中

$$k(x) = \frac{(\beta^T \zeta_{-1} + \hat{d} + \epsilon)}{\lambda_0} \quad (7)$$

$$\text{mat}(S(t), \alpha(t), \Phi) = \begin{cases} \alpha(x, t) \frac{S(t)}{\Phi}, & |S(t)| \leq \Phi \\ \text{sgn}(S(t)), & |S(t)| > \Phi \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $\beta = [\theta^T \ \Phi^T]^T$ ,  $\zeta = [\zeta^T \ \eta^T u_{eq}]^T$ ,  $\epsilon$  为一正的裕度常数。

**定理 1** 对于被控对象(1)采用变结构控制策略(5), 在  $|S(t)| > \Phi$  区域外, 系统满足滑模存在可达条件  $S \dot{S} \leq 0$ 。

**定理 2** 对于被控对象(1)采用变结构控制策略(5), 在  $|S(t)| \leq \Phi$  区域内, 系统动态特性满足

$$\dot{S}(t) = -\gamma (b_0 + \Phi^T \eta) S(t) + G_{\Delta p} \quad (9)$$

式中

$$G_{\Delta p} = (\hat{\theta}^T - \theta^T) \zeta + (\hat{\Phi}^T - \Phi^T) \eta u_{eq} + (\hat{d} - d) \quad (10)$$

证明 当  $|S(t)| \leq \Phi$  时, 由定义(3)可推出变结构控制系统的等效框图如图 1 所示。

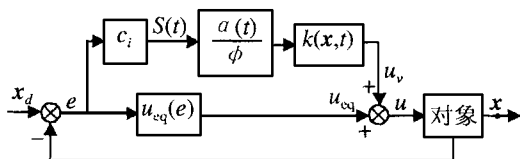


图 1  $S(t) \leq \Phi$  区域内变结构控制系统的等效框图

由式(9)可得

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= (\hat{\theta}^T - \theta^T) \zeta + (\hat{\Phi}^T - \Phi^T) \eta u_{eq} + \\ &(\hat{d} - d) - (b_0 + \Phi^T \eta) k(x, t) \alpha(x, t) \frac{S(t)}{\Phi} \end{aligned}$$

$$\alpha(x, t) = \frac{\gamma\varphi}{h(x, t)} \quad (11)$$

则变结构控制系统在  $|S(t)| \leq \varphi(t)$  区域内的动态特性可由式(9)确定。(证毕)

以上分析表明,当变结构系统的状态轨迹在  $|S(t)| > \varphi$  区域时,系统特性等同于常规的变结构控制,系统的状态轨迹被引向滑模平面的方向运动;当变结构系统的状态轨迹在  $|S(t)| \leq \varphi$  区域时,控制量中的不连续项转化成连续项,系统的动态特性如式(9)所示。

### 3.2 稳态误差与饱和特性宽度的关系

根据以上分析得到的  $|S(t)| \leq \varphi$  区域内变结构控制系统的动态特性,本文提出下述定理,给出系统的稳态误差指标与加权系数  $\alpha(x, t)$  的数学关系,为设计可消除变结构控制系统的抖振并满足系统稳态误差指标要求的控制策略提供了依据。

**定理 3** 若对被控对象(1)采用变结构控制策略(5),则满足系统的稳态误差  $e(t)$  小于给定值  $e_{ss}$  的充分条件是  $\alpha(x, t)$  中的参数  $\gamma$  必须满足

$$\gamma \frac{\max_{x,t} [\theta^T \zeta_+ + \Phi^T \eta_{ueq} + \tilde{d}]}{\lambda_0 c_1 e_{ss}} \quad (12)$$

证明 由定理 2 知,  $S(t)$  与输入  $G_{\Delta p}$  之间的关系为

$$S(s) = \frac{1}{s + \gamma(b_0 + \Phi\eta)} G_{\Delta p} \quad (13)$$

其中  $s$  为拉普拉斯算符。根据终值定理,有

$$\begin{aligned} \lim_t S(t) &= \lim_s S(s) = \\ \lim_s \frac{s}{s + \gamma(b_0 + \Phi\eta)} G_{\Delta p}(s) &= \\ \frac{1}{\gamma(b_0 + \Phi\eta)} \lim_t G_{\Delta p} \end{aligned}$$

对上式进行处理,有

$$\begin{aligned} \lim_t S(t) &= \frac{1}{\gamma(b_0 + \Phi\eta)} \max_{x,t} [G_{\Delta p}(x, t)] \\ \frac{\max_{x,t} [\theta^T \zeta_+ + \Phi^T \eta_{ueq} + \tilde{d}]}{\lambda_0 \gamma} \end{aligned}$$

于是系统的稳态滑模误差  $S_{ss}$  应在下述范围内

$$S_{ss} \frac{\max_{x,t} [\theta^T \zeta_+ + \Phi^T \eta_{ueq} + \tilde{d}]}{\lambda_0 \gamma} \quad (14)$$

由滑模平面定义(3)可知,  $S(t)$  相当于一个低通滤波器的输入,而  $e(t)$  则相当于该滤波器的输出。对式(3)两边取拉氏变换,有

$$E(s) = \frac{1}{s^{n-1}} S(s) \quad (15)$$

由上式可推导出系统的稳态误差  $e_{ss}$  与滑模稳态误差  $S_{ss}$  的关系如下

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^{n-1} \sum_{i=0}^n c_i s^i} S(s) = \\ \frac{1}{c_1} \lim_{s \rightarrow 0} S(s) &= \frac{1}{c_1} S_{ss} \end{aligned}$$

根据上式可得到满足系统的稳态误差指标小于给定值  $e_{ss}$  的充分条件为

$$S_{ss} = \lim_t S(t) = c_1 e_{ss} \quad (16)$$

因此,由式(14)和(16)可得出  $\gamma$  的取值范围。(证毕)

因为  $G_{\Delta p}$  是连续的,式(15)可按泰勒级数在  $x(t) = x_d(t)$  处展开。取一阶近似,其余的高阶项合并为  $o(\zeta)$ ,则有

$\dot{S}(t) = -\gamma(b_0 + \Phi\eta)S(t) + G_{\Delta p}(x_d, t) + o(\zeta)$  式中  $o(\zeta)$  可看作由于  $x_d(t)$  代替  $x(t)$  而产生的高阶无穷小。则定理 2 的结论变为

$$\gamma \frac{\max_{x_d, t} [\theta^T \zeta_+ + \Phi^T \eta_{ueq} + \tilde{d}]}{\lambda_0 c_1 e_{ss}} \quad (17)$$

由式(3), (13)和(16),可以得到图 2 所示的系统预报边界的等效框图。图 2 反映出既可消除系统的抖振又能满足系统稳态误差指标要求的控制策略设计的过程。经分析可知,图 2 中的输入  $G_{\Delta p}(x, t) = (\hat{\theta}^T - \theta^T) \zeta_+ + (\hat{\Phi}^T - \Phi^T) \eta_{ueq} + (d - \hat{d})$  是引起稳态误差的原因。系统设计的任务就是选择合适的参数  $\gamma$ , 保证系统的稳态误差  $e(t)$  小于给定的稳态误差指标  $e_{ss}$ 。

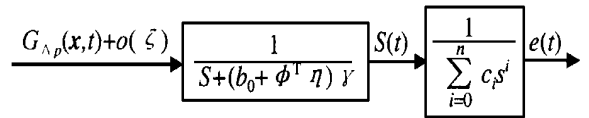


图 2 系统预报边界的等效框图

## 4 仿真实例

考虑单输入非线性控制系统  $\dot{x}^1 = x^2, \dot{x}^2 = -(1 + |\sin(t)|)x^2 \cos(3x) + u$ 。上述给定系统中,  $\hat{\theta} = -1.5, \hat{\theta} = 1, \zeta(x, t) = x^2 \cos(3x), b_0(x, t) = 1, \hat{\Phi}\eta = 0, d(t) = 0$ 。假设系统滑模平面为  $S(t) = \hat{e}(t) + e(t)$ , 系统要求的性能指标为  $e_{ss} = 0.1$ 。首先计算  $G_{\Delta p}(x_d, t)$  的上限,由  $\lambda_0$  的定义可知  $\lambda_0 = 1$ , 根据定理 3 可确定取  $\gamma = 12$ 。依照方程  $\mathcal{Q}(t) = -\gamma\mathcal{Q}(t)$

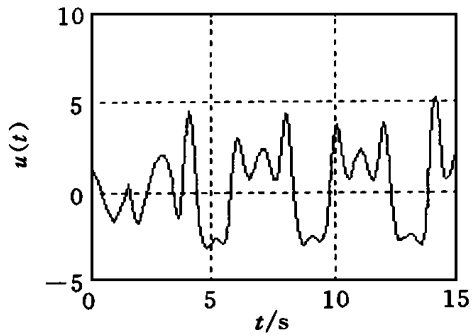


图3 系统的控制量

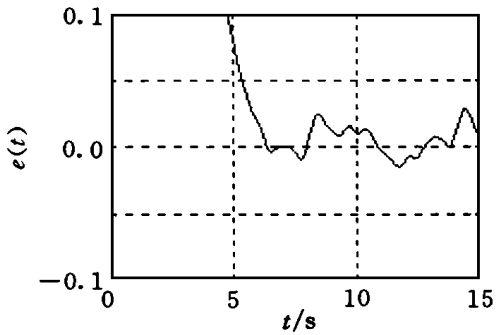


图4 系统的稳态误差

+  $k(x_d, t)$  所确定的  $\mathcal{Q}(t)$  作为变边界饱和特性的宽度, 再依照式(5)取控制策略, 其中,  $\mathcal{Q} \in [0.1, 0.3]$ 。其仿真结果如图3和图4所示。可见控制量的抖振明显减弱了, 而稳态误差也达到了预先设计的要求。

## 5 结 语

本文提出一种新的变结构控制平滑方法, 给出变结构控制系统的稳态误差指标以及与加权系数之间的数学关系。根据这一关系, 能对系统的稳态误差

做出定量的描述。通过系统的稳态误差指标可以设计出固定边界的平滑方案, 从而既可消除系统的抖振又能满足对系统稳态误差指标的要求。仿真结果证明了本文提出的变结构控制平滑方法的正确性和有效性。

## 参 考 文 献

- 1 Asada H, Slotine J J E. Robot analysis and control. John Wiley & Sons, Inc, 1986
- 2 Slotine J J E. Applied nonlinear control. Prentice-Hall, 1991
- 3 Xu Jian-Xin, Lee Tong-Heng, Wang Mao *et al.* Design of variable structure controllers with continuous switching control. *Int J Contr*, 1996, 65(3): 409 ~ 431
- 4 Bontolini G. An improved, chattering free, VSC scheme for uncertain dynamical system. *IEEE Trans on Autom Contr*, 1996, 41(8): 241 ~ 246
- 5 Pushkin Kachroo, Masayoshi Tomizuka. Chattering reduction and error convergence in the sliding-mode control of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans on Autom Contr*, 1996, 41(7): 1063 ~ 1068

## 作 者 简 介

李 涛 男, 1974年生。1998年在哈尔滨工业大学获硕士学位, 现为清华大学博士研究生。主要研究方向为变结构控制理论, 并行工程。

冯 勇 男, 1962年生。1991年在哈尔滨工业大学获博士学位, 现为哈尔滨工业大学教授。主要研究领域为变结构控制及计算机控制。

安澄全 男, 1974年生。1997年在哈尔滨工业大学获学士学位, 现为哈尔滨工业大学硕士研究生。主要研究方向为变结构控制理论。