

高维混沌系统的混合控制方法*

卢俊国 汪小帆 王执铨
(南京理工大学自动控制系 210094)

摘要 将最短时间最优控制思想用于混沌轨道引导,通过可控域把混沌轨道引导和不稳定周期轨道的稳定化方法有机地结合起来,提出一种高维混沌系统的混合控制方法。利用该方法可实现高维混沌系统不稳定周期轨道之间的快速、有效切换。以双转子系统为例进行数字仿真,仿真结果表明了该算法的有效性。

关键词 控制, 稳定化, 混沌

分类号 TP 27

Hybrid Approach to the Control of Chaos in High Dimensional Systems

Lu Junguo, Wang Xiaofan, Wang Zhiqian
(Nanjing University of Science & Technology)

Abstract The idea of minimum-time optimal control is applied to chaotic orbit targeting. Based on a combination of chaotic orbit targeting with a stabilization method for unstable periodic orbit via controllable target, a hybrid approach to the control of chaos in high dimensional systems is proposed. This method provides fast and efficient switching among unstable periodic orbits in a high dimensional chaotic system. A numerical example of the double rotor map demonstrates the effectiveness of the approach.

Key words control, stabilization, chaos

1 引言

近十年来,混沌控制已发展为非线性科学的一个重要研究方向,引起了研究人员的广泛关注^[1-7]。Vincent^[6]根据混沌的遍历性理论,提出一种混沌系统的控制算法。该算法首先利用混沌行为的遍历性等待系统进入可控域,然后激发局部状态反馈控制器来实现控制混沌系统。但当初始状态在可控域之外时,混沌系统往往需要很长时间才能到达可控域。

为缩短系统稳定的时间,本文把最短时间最优控制思想用于轨道引导,通过可控域,把混沌轨道引导和不稳定周期轨道的稳定化方法(状态反馈控制)有机地结合起来,提出一种高维混沌系统的混合控制方法,并利用该方法实现高维混沌系统不稳定周

期轨道之间的快速、有效切换;以双转子系统为例进行了数字仿真,并与文献[6]中的算法进行比较,仿真结果表明了本文算法的有效性。

2 问题描述

考虑受控的离散混沌系统

$$X_{k+1} = F(X_k, U_k) \quad (1)$$

其中, $X_k = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)]$ R^n 为状态变量, $F = [f_1, f_2, \dots, f_n]$ 为状态变量的连续可微函数, $U_k = [u_1(k), u_2(k), \dots, u_m(k)]$ R^m 为控制向量。假设当 $U_k = U$ 为常值时,系统

$$X_{k+1} = F(X_k, U) \quad (2)$$

为一混沌系统,设 X 为混沌系统(2)的一个不动点,即 $X = F(X, U)$ 。

所要解决的问题是求控制律 $U_k = U + \Delta U_k$, 其

中 $\Delta u_{i\min}, \Delta u_i(k), \Delta u_{i\max}, \Delta u_{i\min}, \Delta u_{i\max} (i = 1, 2, \dots, m)$ 为常数,使得受控系统(1) 稳定在不动点 \bar{X} 上。

3 控制器设计

3.1 局部反馈控制器设计和可控域估计

首先将受控系统(1) 在 (\bar{X}, \bar{U}) 处线性化,得

$$Y_{k+1} = AY_k + B\Delta U_k \quad (3)$$

其中, $A = \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{\bar{X}, \bar{U}}, B = \frac{\partial F}{\partial U} \Big|_{\bar{X}, \bar{U}}, Y_k = X_k - \bar{X}, \Delta U_k = U_k - \bar{U}$, 且设 (A, B) 可控。根据稳定性理论,如果线性化系统(3) 在原点渐近稳定,则系统(1) 在 (\bar{X}, \bar{U}) 处局部渐近稳定。取线性反馈控制律

$$\Delta U_k = -KY_k, \quad K = R^{1 \times n} \quad (4)$$

则受控的线性化系统(3) 可写成

$$Y_{k+1} = (A - BK)Y_k = \hat{A}Y_k \quad (5)$$

利用可任意配置 $A - BK$ 特征值的极点配置法来确定线性反馈增益阵 K 。

假设 A 的特征多项式的系数为 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $A - BK$ 的特征值为给定的 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, 其特征多项式的系数为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 。如果可控性矩阵

$$C = (B | AB | A^2B | \dots | A^{n-1}B)$$

的秩为 n , 那么极点配置问题存在唯一解,其解为

$$K = (\alpha_n - a_n \dots \alpha_1 - a_1)T^{-1}$$

其中 $T = CW$, 且

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

采用 Lyapunov 直接法估计受控系统(1) 在 (X, U) 处的可控域,取 Lyapunov 函数为

$$V(Y_k) = Y_k^T P Y_k \quad (6)$$

其中 $P = \hat{Q} + \hat{A}^T P A$, \hat{Q} 为对称正定阵。Lyapunov 函数(6) 用来求系统(1) 在反馈控制律(4) 作用下的可控域,但在实际中控制量不可能无界,必须满足给定的控制量限制,即

$$\Delta u_{i\min} \leq \Delta u_i \leq \Delta u_{i\max}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

其中, $\Delta u_{i\min} = u_{i\min} - \bar{u}_i, \Delta u_{i\max} = u_{i\max} - \bar{u}_i$ 。因此实际中所用的是如下的饱和反馈控制律

$$\text{Sat}[\Delta u_i(Y_k)] = \begin{cases} \Delta u_{i\max}, & \Delta u_i(Y_k) > \Delta u_{i\max} \\ \Delta u_i(Y_k), & \Delta u_{i\min} \leq \Delta u_i(Y_k) \leq \Delta u_{i\max} \\ \Delta u_{i\min}, & \Delta u_i(Y_k) < \Delta u_{i\min} \end{cases} \quad (7)$$

求可控域问题为在饱和控制律(7) 的作用下求 V_{\max} , 当 $V < V_{\max}$ 时能保证

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(Y_{k+1}) - V(Y_k) = \\ & Y_{k+1}^T P Y_{k+1} - Y_k^T P Y_k = \\ & [F(X_k, U_k) - \bar{X}]^T P [F(X_k, U_k) - \bar{X}] - \\ & (X_k - \bar{X})^T P (X_k - \bar{X}) < 0 \end{aligned}$$

则由 $V < V_{\max}$ 围成的区域即为可控域。故求解可控域问题实质上等价于求解一个有约束条件的最优化问题,即

$$\begin{cases} \min V(Y_k) \\ \text{s.t. } \Delta V \leq 0, \quad Y_k = 0 \end{cases} \quad (8)$$

3.2 混沌轨道引导控制器

混沌轨道引导控制器的作用是当混沌系统的状态不在可控域内时,寻找满足限制条件的开环控制 U_k 来引导混沌系统轨道,以使系统尽快地进入可控域。该问题实质上等价于如下的最短时间最优控制问题

$$\begin{aligned} \min m \text{ over } u_{i\min} \leq u_i(k) \leq u_{i\max} \\ \text{s.t. } (X_m - \bar{X})^T P (X_m - \bar{X}) \leq V_{\max} \end{aligned}$$

其中 $X_{k+1} = F(X_k, U_k) (k = 0, 1, \dots, m - 1)$ 和 X_0 为初始状态。解具有非线性动态特性和控制变量受约束的离散系统最短时间控制问题是较为困难的。我们可从 $m = 1$ 开始,对每一个 $m (m = 1, 2, \dots)$ 解如下最优化问题

$$\begin{aligned} \min (X_m - \bar{X})^T P (X_m - \bar{X}) \\ \text{over } u_{i\min} \leq u_i(k) \leq u_{i\max} \\ \text{s.t. } X_{k+1} = F(X_k, U_k) \end{aligned}$$

$(k = 0, 1, \dots, m - 1)$ 和 X_0 为初始状态

第一个满足 $(X_m - \bar{X})^T P (X_m - \bar{X}) \leq V_{\max}$ 的 m 就是所求的最短时间,相应的 $\{U_k\}_{k=0,1,\dots,m-1}$ 就是所要求的引导混沌系统轨道的最优控制量。

4 控制算法

本文的控制算法是先用最短时间的轨道引导控制使系统快速进入可控域,然后激发局部状态反馈控制器来实现控制混沌系统。设轨道引导控制为 U_{kzui} , 则控制算法如下

$$\begin{aligned} \text{IF } V > V_{\max}, \\ & U_k = U_{kzui} \text{ (混沌轨道引导控制器)} \\ \text{ELSE } u_i(k) &= \text{Sat}[\Delta u_i(Y_k)] + \bar{u}_i(k) \\ & \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ (局部反馈控制器)} \end{aligned}$$

5 仿真实例

考虑图 1 所示的双转子系统, 它由质量可忽略不计的两根杆组成, 长度分别为 l_1 和 $2l_2$, 且分别围绕固定点 P_1 和运动点 P_2 做回转运动。在 P_2 处固定一质量为 m_1 的物体, 在第二根杆的两端分别固定一质量为 $0.5m_2$ 的物体。一个周期为 T , 大小为 f_0 的外力垂直作用在第二根杆的末端。双转子在 P_1 和 P_2 处分别受到与角速度 $\dot{\theta}_1(t)$ 和 $\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t)$ 成正比的摩擦力的作用, 比例系数分别为 v_1 和 v_2 。忽略重力的影响, 在受第 $k + 1$ 个外力作用后, 双转子系统的状态方程为 4 维映射^[7]

$$\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MY_n + X_n \\ LY_n + G(X_{n+1}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中, $X_n = (\theta_1(nT), \Theta(nT))$ 和 $Y_n = (\dot{\theta}_1(nT), \dot{\theta}_2(nT))$ 分别为两根杆在第 n 个受力时刻的角位置和角速度; 常数阵 L, M 和 $G(X_n)$ 分别定义为

$$L = \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} e^{\lambda T} - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} d & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$b = -\frac{v_2}{\Delta}, \quad a = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v_1}{\Delta} \right)$$

$$d = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v_1}{\Delta} \right), \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(v_1 + v_2 \pm \Delta)$$

$$\Delta = \sqrt{v_1^2 + 4v_2^2}, \quad G(X_n) = \begin{bmatrix} c_1 \sin \theta_1(nT) \\ c_2 \sin \theta_2(nT) \end{bmatrix}$$

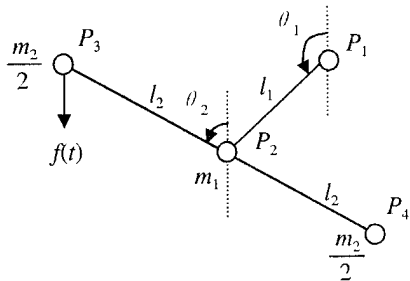


图 1 双转子系统

其中, $c_1 = f_0 l_1 / I, c_2 = f_0 l_2 / I, I = (m_1 + m_2) l_1^2 = m_2 l_1^2$ 。仿真中取 $l_1 = 1/\sqrt{2}$ 和 $v_1 = v_2 = T = I = m_1 = m_2 = l_2 = 1$, 则当 $f_0 = 9.0$ 时, 双转子映射有混沌吸引子。此时该映射有两个正的 Lyapunov 指数和 36 个嵌在混沌吸引子中的不动点。

取 f_0 为控制参数, 且满足 $|f_0 - f_0^*| < \delta$, 其中 $f_0^* = 9.0, \delta = 1$ 。用本文算法实现双转子系统(9)中 4 个不动点之间的切换, 仿真结果如图 2 所示。用文

献[6] 算法的仿真结果如图 3 所示。

由图 2 和图 3 可以看出, 文献[6] 算法的切换时间依不动点的不同, 从 10 000s 左右到 25 000s 左右; 而本文算法的切换时间只有 10s 左右, 切换时间取得了 3 ~ 4 个数量级的改善。

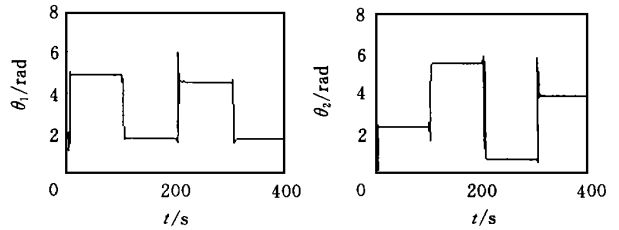


图 2 用本文算法实现式(9) 切换时 θ_1 和 θ_2 随 t 的演化

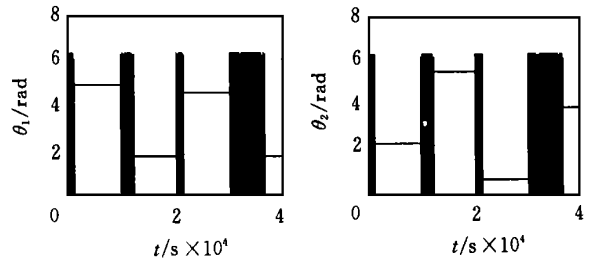


图 3 用文献[6] 算法实现式(9) 切换时 θ_1 和 θ_2 随 t 的演化

6 结 语

本文通过可控域的概念, 把混沌轨道引导和局部状态反馈控制有机地结合起来, 提出一种高维混沌系统的混合控制方法。仿真结果表明, 利用该方法可以实现高维混沌系统不稳定周期轨道之间的快速、有效切换, 且切换时间比文献[6] 中算法有明显改善。

参 考 文 献

- 1 M Lakshmanan, K Murali. Chaos in nonlinear oscillators: Controlling and synchronization. Singapore: World Scientific, 1996
- 2 K Judd *et al.* Control and chaos: Mathematical modeling. Boston: Birkhauser, 1997
- 3 G Chen, X Dong. From chaos to order-perspectives, methodologies and applications. Singapore: World Scientific, 1998
- 4 T Kapitaniak. Chaos for engineers: Theory, applications and control. New York: Springer-Verlag, 1998

水平也必须随之变化,这样才能适应新的要求。评价决策模型也应具有动态可变性,否则做出的评价就失去了其辅助决策的意义。小波神经网络的动态可变性恰好适应于这种需要。

2) 小波神经网络能包含位于不同类型变量空间中的变量。当两类不同性质的属性进行比较时,往往很难判断它们之间的相对重要性,更难于定量表达;对于同一属性的不同属性值,可以通过比较得出其隶属度或根据归纳的隶属度函数计算出其隶属度。网络通过实例的学习来获取知识,由于抽象性,使得小波神经网络成为一个模拟人脑思维的“黑箱”。

3) 小波神经元及整个结构的确定有可靠的理论依据,可避免BP网络等结构设计的盲目性。由于小波神经元的低相关性,使得小波网络有更快的收敛速度。

参考文献

- 1 Zhang Q, Benvenise A. Wavelet network. IEEE Trans on Neural Network, 1992, 3(6): 889 ~ 898
- 2 Delyon B, Juditsky A, Benveniste A. Accuracy analysis for wavelet approximations. IEEE Trans on Neural Network, 1995, 6(2): 332 ~ 348
- 3 丁宇新,沈雪勤. 基于能量密度的小波神经网络. 计算机学报, 1997, 20(9): 832 ~ 838
- 4 陈湛匀. 现代决策分析概论. 上海: 上海科学技术出版社, 1991
- 5 王应明. 运用无限方案多目标决策方法进行有限方案多目标决策. 控制与决策, 1993, 8(1): 25 ~ 29
- 6 樊治平. 多属性决策的一种新方法. 系统工程, 1994, 12(1): 15 ~ 17

作者简介

宋如顺 男, 1957年生。南京师范大学计算机系副教授。主要学术方向为决策支持系统和计算机网络安全控制与决策。

(上接第761页)

参考文献

- 1 赵明旺. 连续可微函数全局优化的混合遗传算法. 控制与决策, 1997, 12(5): 589 ~ 592
- 2 李敏强, 张志强, 寇纪淞. 关于杂合遗传算法的研究. 管理科学学报, 1998, 1(1): 64 ~ 68
- 3 De Jong K. Are genetic algorithms function optimizers. In: Parallel Problem Solving from Nature 2. Amsterdam: Elsevier, 1992. 3 ~ 13
- 4 Michalewicz Z. Genetic algorithms + Data structures = Evolution programs. 3rd Edition. New York: Springer, 1996
- 5 Altenberg L. The evolution of evolvability in genetic programming. In: Genetic Programming. Cambridge:

The MIT Press, 1994. 47 ~ 74

作者简介

林丹 男, 1968年生。1995年于南开大学获硕士学位, 现为天津大学数学系讲师, 在职博士生。研究方向为进化计算。

李敏强 男, 1965年生。天津大学系统工程研究所教授。研究方向为系统工程与信息系, 机器学习与人工智能, 数据库与知识发现。

寇纪淞 男, 1947年生。天津大学副校长, 教授, 博士生导师。研究方向为管理科学, 系统决策, 计算机工程, 人工智能。

(上接第764页)

- 5 A L Fradkov, A Yu Pogromsky. Introduction to control of oscillations and chaos. Singapore: World Scientific, 1999
- 6 Thomas L Vincent. Control using chaos. IEEE Control Systems, 1997, 65 ~ 76
- 7 F J Romeiras, C Grebogi, E Ott *et al.* Controlling chaotic dynamical systems. Physica D, 1992, 58: 165 ~ 192

作者简介

卢俊国 男, 1975年生。南京理工大学自控系博士生。研究方向为非线性控制理论与应用, 神经网络, 混沌控制等。

汪小帆 男, 1967年生。南京理工大学自控系副教授。研究方向为非线性控制理论与应用, 混沌控制等。

王执铨 男, 1939年生。1962年毕业于哈尔滨军事工程学院, 现为南京理工大学自控系教授, 博士生导师。目前研究方向为高精度数字伺服系统, 智能控制, 容错控制等。