第 15 卷 第 6 期　控 制 与 决 策　2000 年 11 月
Vol. 15 No. 6　CONTROL AND DECISION　Nov. 2000

基于不变集的一类混合系统的稳定性*

翟长连　吴智铭
(上海交通大学自动化系　200030)

摘　要　利用混合 Petri 网为混合系统建模,探讨了基于不变集混合系统在 Lyapunov 意义下关于恢复半径的稳定性概念,并给出利用 Lyapunov 函数法判定混合系统的稳定性、一致稳定和渐近稳定的充分条件。

关键词　混合动态系统,稳定性,Petri 网,不变集
分类号　TP 301

Stability of a Class of Hybrid Dynamical Systems Based on Invariable Sets

Zhai Changlian, Wu Zhiming
(Shanghai Jiaotong University)

Abstract　Hybrid dynamical systems (HDS) are modeled with hybrid Petri net. The stability in the sense of Lyapunov with resiliency radius of HDS based on invariable sets is discussed. Sufficient conditions to determine the stability, uniform stability and asymptotic stability of the systems are presented.

Key words　hybrid dynamical systems, stability, Petri net, invariable set

1　引　　言

混合动态系统(HDS)是由连续变量动态系统(CVDS)和离散事件系统(DEDS)相互混合和作用而成的一类复杂的智能系统。它的稳定性既要考虑连续变量动态系统,又要考虑离散事件动态系统,因此,HDS 稳定性的研究较之 CVDS 和 DEDS 更为困难和复杂。Ye 等[1]针对更广义的一类 HDS 给出几种关于不变集的稳定性定义,并讨论了系统不变集的一致稳定和一致渐近稳定的充分条件,在一定的假设条件下给出了系统的一致渐近稳定的必要条件。Li 等[2]基于 HDS 的广义 Petri 网模型,给出了系统的 Lyapunov 稳定的充分条件。王小捷等[3]也讨论了基于不变集的混合系统稳定性,给出了稳定的充分条件,并进一步讨论了一类特殊的混合系统的稳定性与其子系统之间的关系。Iftar 等[4]给出了不变集的稳定性定义和稳定条件,假设不变集是由离散状态的合法集和所有连续子系统的平衡点构成,并得到当混合系统稳定时它所包含的子系统也稳定的结论。

本文从不变集的角度研究混合系统的稳定性。与文献[1～6]不同的是,考虑了离散事件的突发性或扰动引起的错误。本文从理论上拓宽了混合动态系统稳定性研究的范围,深化了 HDS 稳定性的研究。

2　基于 Petri 网的混合系统模型

近年来,对混合系统引入了大量的模型,这些模型大多是用一组微分方程描述连续部分,用离散事件系统描述其间转换关系。有限自动机为混合系统的建模提供了方便的方法,另外赋时自动机结构也被引入混合系统。有限自动机在混合控制系统的建

* 国家自然科学基金项目(60074011)
1999-06-28 收稿, 1999-11-29 修回

模、分析和综合中取得了巨大的成功, 但仍存在一些缺陷, 特别是在分布式并行过程情况下的复杂性太高。

并行系统是指几个相对独立的子系统同时运行。为了处理并行过程, 有必要利用更适合于并行系统建模的离散事件系统模型, 这样的模型可用 Petri 网来实现。一个有限自动机一般用有向图表示, 有限自动机的标识规则相对简单, 通常表示序列性的行为。Petri 网是包含两种不同类型顶点的有向图, 与自动机不同的是, 它的结构和标识规则具有更丰富的含义。

许多文献利用 Petri 网对混合系统进行建模, 如文献[5]。本文定义如下的混合 Petri 网:

定义 1　一个混合 Petri 网记为 HPN = $(P, T, I, O, m_0, F_m, x, \alpha, \Psi, E)$, 其中:

$P = \{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$ $(n > 0)$ 是有限状态位置集, 容量为 1;

$T = \{t_1, t_2, \cdots, t_h\}$ $(h \geq 0)$ 是有限变迁集, P, T 满足 $P \cup T \neq \varnothing, P \cap T = \varnothing$;

$I: T \to 2^P$ 是输入函数;

$O: T \to 2^P$ 是输出函数;

m_0 为状态位置的初始标识, 其可达标识 $M = \mathrm{REA}(m_0)$;

F_m 为合法的状态标识集;

$x = \{x_1, x_2, \cdots, x_l\}$ $(l > 0)$ 是连续系统的状态变量;

$\beta: m_i \to \mathring{x} = f_i(x, \tau, u)$, $\forall m_i \in M$;

$E: E(p_i) \subseteq R^r$ 是位置 p_i 的切换条件;

$\Psi_k: X \times T \to X$ 是赋值函数, 当变迁 $t_j \in T$ 激发时, 得到标识 m_{j_i}, 进入另一个连续系统时的变量根据 $\Psi_{j_i}(m_{j_i}, x)$ 的定义被重新赋值, 作为新系统的初始值。

对于 HPN, 当没有相应事件引入时, 退化为一般的连续动态系统; 当不考虑 $\beta(p_i)$ 时, 混合 Petri 网成为一般的 Petri 网。

定义 2　HPN 的状态定义为 $s(\tau) = (m(\tau), x(\tau))$, 其中 $m(\tau)$ 和 $x(\tau)$ 为 τ 时刻 PN 的状态标识向量和连续状态向量。

HPN 中的标识有两种可能状态: 可用状态和不可用状态。位置 p_i 中的 token 在时间 τ 是有用的, 如果它的连续状态 $x(\tau)$ 符合切换条件。在任意 τ, 标识 $m(\tau) = m^a(\tau) + m^u(\tau)$, $m^a(\tau)$ 和 $m^u(\tau)$ 分别是由有用和无用 token 组成的标识。

对于当前状态, 一个变迁 t_j 是使能的, 如果 HPN 的标识满足 $\forall P_i \in \mathring{t}_j, m_i^a(\tau) = 1$。

3　混合动态系统基于不变集的稳定性

混合动态系统的状态为 $s(\tau) = (m(\tau), x(\tau))$, 状态空间为 $M \times X$。其中, M 为可数离散的状态集, (M, ρ^d) 为度量空间, X 为 n 维欧氏空间, (X, ρ^c) 为度量空间。令 $\bar{X} = M \times X$, $\rho = \rho^d + \rho^c$, 则 $(\bar{x}, \rho)$ 为度量空间。

定义 3　$\rho(s(\tau_1), s(\tau_2))$ 是 $s(\tau_1)$ 到 $s(\tau_2)$ 的距离, 其定义如下

$$\rho(s(\tau_1), s(\tau_2)) = \rho^c(x(\tau_1), x(\tau_2)) + \rho^d(m(\tau_1), m(\tau_2))$$

$\rho(s(\tau), S) = \inf\limits_{s(\tau')\in S} \rho(s(\tau), s(\tau'))$ 是指从状态 $s(\tau)$ 到子集 S 的距离。因此 (S, ρ) 是一个度量空间。

定义 4　$S_M \subset \bar{X}$ 是不变集, 若 $\forall s(\tau) \in S_M$, 则 $s(\tau)$ 可到达的状态集 $\mathrm{REA}(s(\tau)) \subseteq S_M$。

由 $\bar{X}$ 的构造知, $\forall S_M \subset \bar{X}, \exists S_M^c \subset X, S_M^d \subseteq F_m \subset M$, 使得 $S_M = S_M^c \times S_M^d$。

定义 5　函数 $g(s(\tau))$ 称为关于恢复半径 α 的非增函数, 如果:

1) $g(s(\tau + \tau_1)) \leq g(s(\tau)) + \alpha$, $\forall \tau, \tau_1 \geq 0$;

2) $g(s(\tau))$ 是非增的, 除有限个离散事件变化时间点外。

定义 6　混合控制系统的闭不变集 S_M 是 Lyapunov 意义下关于恢复半径 α 稳定的, 如果对 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta(\epsilon, \tau_0) > 0$, 当 $\rho(s(\tau_0), S_M) < \delta$ 时, 有:

1) $\rho(\mathrm{REA}(s(\tau_0), \tau), S_M) < \epsilon + \alpha, \forall \tau \geq \tau_0$;

2) $\rho(\mathrm{REA}(s(\tau_0), \tau), S_M) < \epsilon$, $\forall \tau \geq \tau_0$, 除有限个离散事件变化时间点外。

若 δ 与初始时间 τ_0 无关, 则称混合系统是 Lyapunov 意义下关于恢复半径 α 一致稳定的。若混合系统是稳定的, 且当 $\tau \to \infty$ 时, 有 $\rho(\mathrm{REA}(s(\tau_0), \tau), S_M) \to 0$, 则系统是 Lyapunov 意义下关于恢复半径 α 渐近稳定的。

定理 1　混合控制系统的闭不变集 S_M 是 Lyapunov 意义下关于恢复半径 α 稳定的条件是: 在 S_M 的一个邻域 $B(S_M, r)$ (r 为充分小正数) 内存在一个函数 V, 并有如下性质:

1) $\forall c_1 > 0, \exists c_2 > 0$, 使对 $\forall s(\tau) \in B(S_M, r)$ 和 $\rho(s(\tau), S_M) > c_1$, 有 $V(s(\tau)) > c_2$;

2) $\forall r_2 > 0, \exists r_1 > 0$, 使当 $\rho(s(\tau), S_M) < r_1$ 时, 有 $V(s(\tau)) \leq r_2$;

3) $\forall s(\tau) \in B(S_M, r)$ 及 $\forall \tau$, $\mathrm{REA}(s(\tau)) \in B(S_M, r)$, 则 $V(\mathrm{REA}(s(\tau)))$ 关于 τ 非增。

证明　设 V 在 $B(S_M, r)$ 中满足性质 1) ～3)。取 $\epsilon < r$, 对 $\rho(s, S_M) = \epsilon$, 令 $\lambda = \inf V(s(\tau))$。由性质 1) 知 $\lambda > 0$; 由性质 2), 对 λ, $\exists \delta > 0$, 使当 $\rho(s(\tau), S_M) < \delta$ 时, 有 $V(s(\tau)) < \lambda$。

要证系统是稳定的, 即证当 $\rho(s, S_M) < \delta$ 时, 对 $\forall \tau \geq 0$, 除有限个时间点外, 有 $\rho(\mathrm{REA}(s), S_M) < \epsilon$; 对 $\forall \tau \geq 0$, 有 $P(\mathrm{REA}(s), S_M) < \epsilon + \alpha$。现用反证法, 假设上述不成立, 即存在 $s \in B(S_M, \delta)$ 及 $\bar{\tau}$($\bar{\tau}$ 不属于有限的时间点), 使得 $\rho(\mathrm{REA}(s, \bar{\tau}), S_M) = \epsilon$。则由性质 3) 知 $V(\mathrm{REA}(s)) \leq V(s) < \lambda$, 与上矛盾, 故假设不成立。(证毕)

定理 2　混合控制系统闭的不变集 S_M 是 Lyapunov 意义下关于恢复半径 α 稳定的条件是: 在 S_M 的一个邻域 $B(S_M, r)$ (r 为充分小正数) 内存在一个函数 V, 并有如下性质:

1) ～3) 同定理 1;

4) 当 $\tau \to \infty$ 时, 有 $V(\mathrm{REA}(s(\tau))) \to 0$, $\mathrm{REA}(s(\tau)) \in B(S_M, r)$, $\tau \in [0, +\infty)$。

证明　若存在 $V(s)$ 满足性质 1) ～3), 则不变集 S_M 是稳定的, 即对 $\forall \epsilon > 0$, 可以找到 $\delta > 0$, 使当 $\rho(s, S_M) < \delta$ 时, 有 $\rho(\mathrm{REA}(s), S_M) < \epsilon$。下面要证 δ 能选得使 $\tau \to \infty$ 时, 有 $\rho(\mathrm{REA}(s), S_M) \to 0$。事实上, 对 $\forall \epsilon$, 由稳定性可找到 $\delta_1 < 0$, 使当 $\rho(s, S_M) < \delta_1$ 时, 有 $\rho(\mathrm{REA}(s), S_M) < \delta$, 则可断定 δ_1 即为所要选取的一个 δ; 若不然, 则至少存在一个 $s \in B(S_M, \delta_1)$, 当 $\tau \to \infty$ 时, 使得 $\rho(\mathrm{REA}(s), S_M) > r_1 > 0$。由性质 1), 有 $V(\mathrm{REA}(s(\tau))) > r_2 > 0$。这与 $\tau \to \infty$ 时, $V(\mathrm{REA}(s(\tau))) \to 0$ 矛盾, 故定理得证。(证毕)

定理 1 和定理 2 给出了混合系统关于不变集的稳定和渐近稳定的判别条件。同样可得到系统的一致稳定性条件, 然而用这种方法判断系统的稳定性并不是一件易事, 有待于进一步探讨。

考虑一种特殊情况: 在混合系统中只存在离散变量对连续系统的作用, 而连续系统不对离散系统起作用。在这样的系统中, 离散系统的不变集是独立于连续子系统的, 则有如下结论:

推论 1　混合控制系统的闭不变集 S_M 是 Lyapunov 意义下关于恢复半径 α 稳定的充分条件是: 连续和离散子系统分别关于 S_M^c 和 S_M^d 稳定。

下面从时间序列角度出发, 给出系统一致稳定的条件。

定理 3　混合控制系统的闭不变集 S_M 是 Lyapunov 意义下关于恢复半径 α 一致稳定的, 离散状态的变化时间点为 $\{\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_n, \cdots\}$, 如果:

1) $\varphi_1(\rho(s(\tau), S_M)) \leq V(s(\tau), \tau) \leq \varphi_2(\rho(s(\tau), S_M))$, φ_1, φ_2 是严格增函数且 $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$;

2) $V(\tau, M^j, x(\tau)) \leq f(V(\tau_i, M^j, x(\tau_j)))$, $\forall \tau \in (\tau_i, \tau_{i+1})$;

3) $V(\tau_{i+k}, M^{j+k}, x(\tau_{i+k})) \leq V(\tau_i, M^j, x(\tau_i)) + \alpha$, $\forall \tau_i \in \{\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_n, \cdots\}$;

4) $V(\tau_{i+1}, M^{j+1}, x(\tau_{i+1})) \leq V(\tau_i, M^j, x(\tau_i))$, $\forall \tau_i \in \{\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_n, \cdots\}$, 除去有限时间点外。

证明　因为函数 f 是连续的且 $f(0) = 0$, 于是对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, 只要 $0 \leq y \leq \delta$, 则有 $f(y) < \varphi_1(\epsilon)$。不妨假设 $\delta \leq \varphi_1(\epsilon)$, 当 $\rho(s(\tau_0), S_M) < \varphi_2^{-1}(\delta)$ 时, 则有 $V(s(\tau_0), \tau_0) \leq \varphi_2(\rho(s(\tau_0), \tau_0)) < \delta$。因为对 $\forall \tau_i \in \{\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_n, \cdots\}$, 除去有限个时间点外, 有 $V(\tau_{i+1}, M^{j+1}, x(\tau_{i+1})) \leq V(\tau_i, M^j, x(\tau_i)) \leq V(\tau_0, M^{j_0}, x(\tau_0)) < \delta$, 因此 $\rho(s(\tau_i), S_M) < \varphi_1^{-1}(\delta) \leq \epsilon$。

对 $\forall \tau \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $V(\tau, M^j, x(\tau)) \leq f(V(\tau_i, M^j, x(\tau_j))) < \varphi_1(\epsilon)$, 因此 $\rho(s(\tau), S_M) \leq \varphi_1^{-1}(V(s(\tau), \tau)) < \epsilon$。而对 $\forall \tau_i \in \{\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_n, \cdots\}$, $V(\tau_i, M^j, x(\tau_i)) \leq V(s(\tau_0), \tau_0) < \delta + \alpha$, 因此 $\rho(s(\tau_i), S_M) \leq \varphi_1^{-1}(V(s(\tau_0), \tau_0)) < \varphi_1^{-1}(\delta + \alpha) \leq \epsilon + \alpha$。

综上, 可知系统是一致稳定的。(证毕)

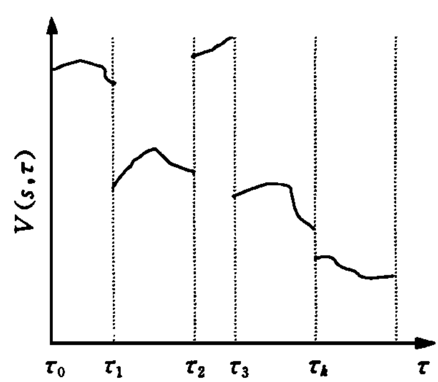

图 1　稳定系统的 **Lyapunov** 函数值

图 1 是对定理 3 中 Lyapunov 函数值的解释, 它表明混合系统的 Lyapunov 函数值总体上应是非递增的, 特别是在离散事件的跳跃点上应满足非递增

的, 但也允许有限个离散点出现异常, 即突然增大, 如图 1 的 τ_2 点。但这样的时间点应是有限个, 才不致影响系统的稳定性, 并且对应这样的连续系统运行时间是有限的, 应在有限的时间内跳到另一连续系统。

对于象开关系统这样简单的混合动态系统, 由于一般没有离散状态的稳定问题要求, 所有的 $m(t)$ 都属于 S_M^d, 因此可将定理 1～定理 3 进行简化, 得到关于开关系统的稳定性结论。考虑由模态 M_1: $\mathring{x} = Ax$ 和模态 M_2: $\mathring{x} = Bx$ 组成的切换系统, 其中 $A = [-0.01\quad 0.01; -0.1\quad -0.01]$, $B = [-0.01\quad 0.1; -0.01\quad -0.01]$。当在右半相空间时为模态 M_1 工作, 否则切换到模态 M_2, 则切换系统失稳[1]。当在 x_1 正半轴 $\pi/3$ 顶角的锥形域时为模态 M_1 工作, 否则切换到模态 M_2, 则切换系统稳定。如果选 Lyapunov 函数 $\rho(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, 则能量函数是非单增的。图 2 为初始状态为(100, 100) 的仿真结果。

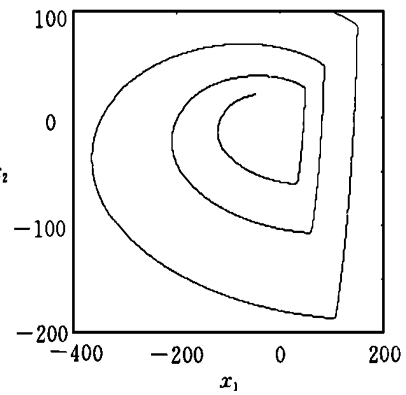

图 2　能量函数非单调增切换系统的稳定性

4　结　　语

本文提出利用一类混合 Petri 网为混合系统建模, 在此基础上讨论了基于不变集的混合系统的稳定性, 提出一种新的混合系统的稳定性概念, 并给出了稳定性的充分条件的判定定理及证明。本文工作深化了 HDS 稳定性的研究。

参 考 文 献

1　Hui Ye, Anthony N Michel, Ling Hou. Stability theory for hybrid dynamical systems. IEEE Tran on Automatic Control, 1998, 43(4): 461～474

2　Zhengguo Li, Cheng Boon Soh, Xinhe Xu. Stability of hybrid dynamic systems. Int J of Systems Science, 1997, 28(8): 849～858

3　王小捷, 韩存武, 文传源. 一类混合动态系统的稳定性. 北京航空航天大学学报, 1997, 23(6): 698～702

4　Altug Iftar, Umit Ozguner. Overlapping decompositions, expansions, contractions and stability of hybrid systems. IEEE Tran on Automatic Control, 1998, 43(8): 1040～1050

5　Xenofon D Koutsoukos, Kevin X He, Michael D Lemmon *et al*. Timed Petri nets in bybrid systems: Stability and supervisory control. DEDS, 1998, 8(2): 137～171

作 者 简 介

翟长连　男, 1970 年生。上海交通大学自动化系博士生。研究方向为混合动态系统, 离散事件系统。

吴智铭　男, 1936 年生。上海交通大学自动化系教授, 博士生导师。主要研究方向为混合动态系统, 智能控制与决策等。