

文章编号: 1001-0920(2001)01-0042-05

连续状态模糊控制系统的分区域稳定性分析

李永明, 史忠科

(西北工业大学 自动控制系, 陕西 西安 710072)

摘要: 给出简化的连续状态下模糊控制系统解的表达形式, 并给出简化模糊系统稳定的充分和必要条件, 统一了目前有关判定连续状态模糊控制系统的稳定性结论。此外, 给出一种寻求稳定模糊控制的方法, 即基于梯度的控制器设计方法。

关键词: 模糊控制; 稳定性; 梯度; 分区域

中图分类号: TP 273.4 文献标识码: A

Regional Stability Analysis of Continuous-times Fuzzy Control Systems

LI Yong-ming, SHI Zhong-ke

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The solution of simplified continuous-times fuzzy control systems is obtained. The necessary and sufficient conditions for the stability of simplified continuous-times fuzzy control systems are given. These conditions unify the existing necessary or sufficient conditions for the stability of continuous-times fuzzy control systems. The gradient-based algorithms are suggested to simplify the stability tests, which allows a systematic approach to find stabilizing fuzzy controls.

Key words: fuzzy control; stability; gradient; region

1 引言

模糊控制是一种基于经验的控制方法, 具有内在的非线性和并行处理机能, 因而很难进行系统的理论研究。迄今为止, 模糊控制仍缺乏系统的稳定性设计方法^[1]。例如, 有关关系模型的稳定性讨论只是针对基本离散型模糊控制进行的, 且其结论并不具有普遍性^[2,3]; 相平面法、绝对圆判据只适用于二阶系统。T-S 模型因其结构的局部为线性系统, 有关稳定性分析结论相对较为完善。它们的共同特点是把模糊系统当作不确定系统, 按不确定系统的有关结

果进行处理, 这样的结果是相对保守的。因为模糊系统一旦给出, 就应按确定系统进行处理。另外, 文献 [4, 5] 稳定性分析都要求每个局部系统满足稳定的条件, 其相应的充分条件也很保守。

本文结合文献 [5~7] 的方法对连续状态模糊控制系统稳定性进行系统的研究, 提出了简化的模糊系统概念。针对此类系统, 给出了系统渐近稳定和大范围渐近稳定的充分和必要条件, 并给出一种实用的判定稳定和寻找稳定控制的模糊控制算法。概括地说, 该算法是基于梯度的, 其基本思想是设法让系统的特征根向稳定的方向转化。

收稿日期: 1999-12-22; 修回日期: 2000-03-30

基金项目: 国家自然科学基金项目(19901028); 国家重点基础研究发展规划专项经费项目(G1998030417)

作者简介: 李永明(1966—), 男, 陕西大荔人, 副教授, 博士, 从事拓扑学、模糊数学等研究; 史忠科(1956—), 男, 陕西岐山人, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要从事鲁棒控制等研究。

2 连续状态模糊模型及其稳定性的一般结论

假设连续状态 T-S 模型的一般形式为

$$R_p^i: \text{if } x_1(t) \text{ is } M^i \text{ and } \dots x_n(t) \text{ is } M_n^i \\ \text{then } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ i = 1, 2, \dots, l \quad (1)$$

其中, M_j^i 为模糊集合, l 为规则个数, $u(t)$ 是控制向量, $x(t) \in X \subseteq R^n$ 是状态向量。若定义 $M^i = M^i \times \dots \times M_n^i$ 直积模糊集, 即 $M^i(x) = \prod_{j=1}^n M_j^i(x_j)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, 则 R_p^i 可简化为

$$R_p^i: \text{if } x(t) \text{ is } M^i \text{ then } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ i = 1, 2, \dots, l \quad (2)$$

整个系统的状态方程为

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^l \omega(x(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)] \quad (3)$$

其中
$$\omega(x(t)) = \frac{M^i(x(t))}{\sum_{j=1}^l M^j(x(t))}$$

令 $S_i = \{x \in X \mid M^i(x) > 0, j \neq i\}$, $i = 1, 2, \dots, l$, 且

$$\eta_i = \begin{cases} 1, & x \in S_i \\ 0, & x \notin S_i \end{cases} \quad (4)$$

其中 S_i 要求满足 $\bigcup_{i=1}^l S_i = X$, 且 $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$ (否则, 可适当对边界加以修改)。

简化后的系统状态方程为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^l \eta_i [A_i x(t) + B_i u(t)] \quad (5)$$

以下恒设原点为系统的平衡点, 0 的邻域为 $S(0)$ 。首先考虑 $u(k) = 0$ 的自治系统的稳定性, 并假设原点属于 $S(0)$ 的内部。

设初始状态为 $x(0)$, 下面给出基于式(5) 的系统状态在 t 时刻解的表达形式。此时设状态先后经过分区 $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_n}$, 对应时间段分别为 $[0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t]$, 在每一分区上式(5) 对应为线性系统, 可求出其对应解。此时整个系统的解为

$$x(t) = \exp(A_{i_n}(t - t_{n-1}) + A_{i_{n-1}}(t_{n-1} - t_{n-2}) + \dots + A_{i_2}(t_2 - t_1) + A_{i_1} t_1) x_0 \quad (6)$$

其中, $x_0 \in S_{i_1}, \exp(A_{i_1} t_1) x_0 \in S_{i_2}, \dots$ 。

由式(6) 推得如下结果:

定理 1 零点渐近稳定的充要条件是: $A(0)$ 为稳定矩阵, 即 $A(0)$ 的特征值的实部都小于 0 。

定理 2 零点大范围渐近稳定的充要条件为 $A(0)$ 稳定, 且 $\forall i, \forall x^0 \in S_i, \exists t_n$, 使得由式(6) 确定的解 $x(t) \in S(0) (t > t_n)$ 。即当 $t > t_n$ 时, $A_{i_n}(t - t_{n-1}) + A_{i_{n-1}}(t_{n-1} - t_{n-2}) + \dots + A_{i_2}(t_2 - t_1) + A_{i_1} t_1$ 为稳定的矩阵。

如下推论给出了相对较为容易实现的算法:

推论 1 零点大范围渐近稳定的充分条件为

- $\forall \{i_k, \dots, i_1\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, k \leq N, i_k, \dots, i_1$ 可重复, $\prod_{j=1}^k A_{i_j}$ 是稳定的矩阵, 其中 $\alpha_j = 1$, 且 $\forall j, \alpha_j > 0$;
- 存在正定阵 P , 使得对任意的 i 均有 $A_i^T P + P A_i < 0^{[4]}$ 。

3 稳定性分析

以下恒设 S_0 为含原点的分区, 对应于 A_0 和 B_0 。由第 2 节知, 原点在 $u = 0$ 时为渐近稳定的必要条件为 A_0 稳定。此时对任一正定矩阵 Q , 下列李雅普诺夫方程有唯一正定解。

$$A_0^T P + P A_0 = -Q \quad (7)$$

令
$$D_i = A_i^T P + P A_i \quad (8)$$

则零点为大范围渐近稳定的充分条件如下:

定理 3 方程(5) 中模型在 $u = 0$ 时大范围渐近稳定的充分条件为: A_0 稳定且存在正定阵 Q , 使得 $\forall i, \forall x \in S_i, x^T D_i x < 0$ 恒成立, 其中等号仅当 $x = 0$ 时成立。

这里 A_0 稳定也为大范围渐近稳定的必要条件。

证明 令 $V(t) = x(t)^T P x(t)$, 则
$$\dot{V}(t) = \dot{x}(t)^T P x(t) - x(t)^T P \dot{x}(t) = \left[\sum_{i=1}^l \eta_i A_i x(t) \right]^T P + x(t)^T P \left[\sum_{i=1}^l \eta_i A_i x(t) \right] x = x(t)^T A_i^T P x(t) + x(t)^T P A_i x(t) = x(t)^T (A_i^T P + P A_i) x(t) = (\text{假定 } x(t) \in S_i) x(t)^T D_i x(t)$$

由题设则 $\dot{V}(t) < 0$ 恒成立, 其中等号仅当 $x(t) = 0$ 时成立。从而由李雅普诺夫稳定性定理知, 该系统在原点大范围渐近稳定。(证毕)

特别地, 若每个 D_i 都负定, 则上述结论成立, 这恰好是 Tanaka 和 Sugeno 等人所得结论 (即推论 1 中的 2))。即使 D_i 不负定, 只要在 S_i 区域上 $x^T D_i x < 0$ 成立, 平衡点仍是大范围渐近稳定的。实际上, 即

使有些局部区域不稳定,利用该定理仍能证明系统是大范围渐近稳定的,如本文仿真示例1。

如何寻找这样的 Q 是定理 3 应用的关键。我们给出一种基于梯度的算法,基本思想是寻找 Q 使得 D_i 的特征值尽量小,则 $x^T D_i x > 0$ 的概率将增加。

以 $\lambda_M(D_i)$ 表示 D_i 的最大特征值,令 $J_i = \lambda_M(D_i)$,则 J_i 为 Q 的函数。因为 Q 正定,可将其分解为 $Q = L^T L$ 。又因 $D (= D_i)$ 是一个对称阵,它可用其特征向量对角化,即 $G^T D G$ 是一个对角阵,其中 G 是正交阵。令 g_M 为 G 中对应于 $\lambda_M(D)$ 的特征向量,则有 $J = \lambda_M(D) = g_M^T D g_M$ 。由 ΔQ 引起的 $\Delta J, \Delta D$ 为: $\Delta J = g_M^T \Delta D g_M, \Delta D = A^T \Delta P + \Delta P A$ (未考虑 g_M 的变化,当 ΔQ 很小时,这样处理并不影响下面的讨论)。

式(7)的解为

$$P = \int_0^{\infty} \exp(A^T t) Q \exp(A t) dt$$

则有

$$\Delta P = \int_0^{\infty} \exp(A^T t) \Delta Q \exp(A t) dt$$

$$\Delta Q = \Delta L^T L + L^T \Delta L + \Delta L^T \Delta L$$

从而得

$$\Delta P = \int_0^{\infty} \exp(A^T t) (\Delta L^T L + L^T \Delta L + \Delta L^T \Delta L) \exp(A t) dt$$

利用 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) = \text{Tr}(B^T A^T)$ 和 $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$, 则得

$$\begin{aligned} \Delta J &= g_M^T \Delta D g_M = \\ &g_M^T (A^T \Delta P + \Delta P A) g_M = \\ &2\text{Tr}(L W \Delta L^T) + \text{Tr}(\Delta L W \Delta L^T) \end{aligned}$$

其中 W 为如下李氏方程的解

$$A_0 W + W A_0^T = - (A g_M g_M^T + g_M^T g_M A^T) \quad (9)$$

$$\text{令 } \frac{\partial J}{\partial L} = 2LW \quad (10)$$

此时,如果取 $\Delta L = -\alpha (\frac{\partial J}{\partial L}) (\alpha > 0)$, 则有

$$\Delta J = -\alpha \text{Tr} \left[\frac{\partial J}{\partial L} \left(\frac{\partial J}{\partial L} \right)^T \right] + \alpha^2 \text{Tr} \left[\frac{\partial J}{\partial L} W \left(\frac{\partial J}{\partial L} \right)^T \right]$$

$$\text{令 } a = \text{Tr} \left[\frac{\partial J}{\partial L} \left(\frac{\partial J}{\partial L} \right)^T \right], \quad b = \text{Tr} \left[\left(\frac{\partial J}{\partial L} \right) W \left(\frac{\partial J}{\partial L} \right)^T \right]$$

则得

$$\Delta J = -\alpha a + \alpha^2 b = b[\alpha - a/(2b)]^2 - a^2/(4b)$$

此时只要取 $\alpha < a/b$, 就有 $\Delta J < 0$ 。特别地,取 $\alpha = a/(2b)$, ΔJ 取最小负值。这样,取 $\Delta L = -\alpha (\frac{\partial J}{\partial L})$, 就可使 D 的特征值趋于负方向,从而达到判定系统稳定的目的。

由以上讨论,可给出如下求解 Q 的算法:

Step1: 取定一正定矩阵 Q , 如取 $Q = I$ (单位矩阵)。解李氏方程(7) 求出 P 。

Step2: 把 P 代入式(8), 由此计算 $x^T D_i x$, 看是否满足定理 3 的条件。若满足,则终止,原系统稳定;否则,进行下一步。

Step3: 若 $x^T D_i x > 0$ 不成立,则由式(10) 计算 $\frac{\partial J}{\partial L}$, 并计算 a, b , 确定 α 的值。

Step4: 令 $L = L - \Sigma \alpha (\frac{\partial J}{\partial L})$, 修改 L 以减小 D_i 的特征值,计算 $Q = L^T L$, 重新进行 Step1。

4 稳定控制

为寻求式(5) 所描述系统的稳定控制算法,可应用定理 3 的结论和第 3 节给出的算法推导得出。其中控制取为局部线性反馈的模糊控制,规则如下

$$R_i: \text{ if } x(t) \text{ is } M_i \text{ then } u(t) = K_i x(t) \quad (11)$$

控制器输出为

$$u(t) = \sum_{i=1}^l \eta_i K_i x(t) \quad (12)$$

把式(12) 代入(5) 得

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^l \eta_i [A_i + \sum_{j=1}^l \eta_j B_j K_j] x(t) = \\ &\sum_{i=1}^l \eta_i [A_i + B_i K_i] x(t) \end{aligned} \quad (13)$$

式(13) 最后一个等式是因为: $\eta_i \eta_j \Leftrightarrow \eta_i = \eta_j = 1$ 。

式(13) 即为进行局部线性反馈后系统的表达形式。将式(13) 中的 $A_i + B_i K_i$ 换为 A_i , 则定理 3 的结论仍然成立。表述如下:

设 Q 为正定矩阵, P 为如下李氏方程的解

$$(A_0 + B_0 K_0)^T P + P(A_0 + B_0 K_0) = -Q \quad (14)$$

并令

$$D_i = (A_i + B_i K_i)^T P + P(A_i + B_i K_i) \quad (15)$$

定理 4 模糊系统(5) 在式(12) 的模糊控制下在零点大范围渐近稳定的充分条件为 $(A_0 + B_0 K_0)$ 稳定(即 (A_0, B_0) 为能控对), 并存在正定矩阵 Q 使得 $\forall i, \forall x \quad x^T D_i x > 0$ 恒成立, 其中等号仅当 $x = 0$ 时成立。且 $(A_0 + B_0 K_0)$ 稳定也为系统大范围渐近稳定的必要条件。

模糊控制的稳定实现,在于寻找相应的局部反馈 $u(t) = K_i x(t), i = 1, 2, \dots, l$ 。最常用的方法是极点配置法。即若系统每个局部线性部分 (A_i, B_i) 为能控对, 则可通过极点配置的方法使每个局部系统稳定, 并最终使系统稳定。由于局部稳定并不能推出整体稳定, 因此必须寻找有效的算法使得通过局部线

性反馈达到整个系统稳定。仿第 3 节寻求 Q 的方法,下面给出基于梯度的求 K_i 的方法。首先假设 Q 和 P 已经选好(基于第 3 节的方法),并满足式(14),其中 K_0 可用极点配置法求得。

设 $D = (A + BK)^T P + P(A + BK)$, 并令 $J = \lambda^M(D)$, 则 $J = \lambda^M(D_i) = g_M^T D g_M$ 。由 ΔK 引起的 ΔJ , ΔD 为

$$\begin{aligned} \Delta D &= (B\Delta K)^T P + P(B\Delta K) \\ \Delta J &= g_M^T \Delta D g_M = 2g_M^T \Delta K^T B^T P g_M = \\ &2\text{Tr}(B^T P g_M g_M^T \Delta K^T) \end{aligned}$$

因此

$$\partial J / \partial K = 2B^T P g_M g_M^T \quad (16)$$

取 $\Delta K = -\alpha(\partial J / \partial K)$, α 为任意正数, 则 $\Delta J = -\alpha \text{Tr} \left[\frac{\partial J}{\partial K} \left[\frac{\partial J}{\partial K} \right]^T \right] < 0$, 从而达到减小 D 的特征值的目的。进一步取 $\alpha > J/c$, $c = \text{Tr} \left[\frac{\partial J}{\partial K} \left[\frac{\partial J}{\partial K} \right]^T \right]$, 则使 D 的最大特征值减小为负值, 从而寻找合适的线性反馈。

基于以上讨论, 可给出如下寻求 K_i 的算法:

Step1: 用极点配置法设定各特征值, 求出初始的 $K_i, i = 1, 2, \dots, l$ (若不能用极点配置法, 则直接设定 K_i)。

Step2: 对 K_0 及给定的正定阵, 由式(14) 求解 P 。

Step3: 把 P 代入式(15) 计算 D_i , 并根据定理 4 判定系统的稳定性。若稳定, 则终止算法; 否则, 进行下一步。

Step4: 若存在 i 使得 $x^T D_i x < 0$ 不成立, 则令 $K_i = K_i - \alpha(\partial J_i / \partial K_i)$, 其中 α 根据上述讨论选取。对此 K_i , 返回 Step3 重新计算。

注 1 上述算法中的 K_i 不是唯一的, 针对实际问题, 应选择合适的初始 K_i , 以最大限度地满足实际问题的要求。

5 实例分析

例 1 设模糊集合 NB, NM, ZO, PM, PB 的隶属函数具有 $\exp \left[-\frac{(x - \mu_i)^2}{\sigma^2} \right]$ 形式(从而支撑集为全体论域)。 $\mu_i = -10, -5, 0, 5, 10; \sigma = 2$ 。隶属函数如图 1 所示。

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.5854 & -0.0297 \\ 0.0386 & -1.1344 \end{bmatrix}$$

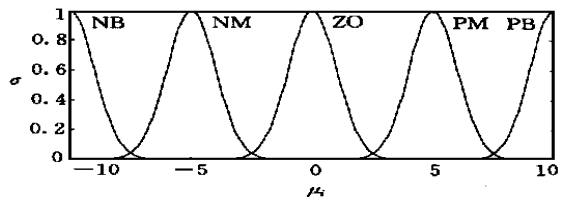


图 1 隶属函数

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} 0.9174 & -0.3622 \\ 0.3985 & -5.2406 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -5.3169 & 0.4730 \\ -0.5913 & 1.7787 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

模糊规则如下

- R_1 : if x_1 is ZO and x_2 is ZO then $\dot{x}(t) = A_{1x}(t)$
- R_2 : if x_1 is NM then $\dot{x}(t) = A_{1x}(t)$
- R_3 : if x_1 is PM then $\dot{x}(t) = A_{1x}(t)$
- R_4 : if x_1 is ZO and x_2 is NB then $\dot{x}(t) = A_{2x}(t)$
- R_5 : if x_1 is ZO and x_2 is PB then $\dot{x}(t) = A_{2x}(t)$
- R_6 : if x_1 is NB and x_2 is ZO then $\dot{x}(t) = A_{3x}(t)$
- R_7 : if x_1 is PB and x_2 is ZO then $\dot{x}(t) = A_{3x}(t)$

取 $A_0 = A_1, Q = I$, 则李氏方程(7) 的解为

$$P = \begin{bmatrix} 0.8538 & -0.0048 \\ -0.0048 & 0.4409 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1.5627 & -0.1126 \\ -0.1126 & -4.6175 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} -9.0734 & 0.1603 \\ 0.1603 & 1.5638 \end{bmatrix}$$

此时, D_1 负定, 其对应的子系统 R_1, R_2, R_3 都稳定。 D_2 的特征值为 1.5647, -4.6196; D_3 的特征值为 -9.0758, 1.5662。从而 D_2, D_3 不负定, 但在相应分区上 $x^T D x$ 值的变化范围 $R_4, R_5: [-462.5636,$

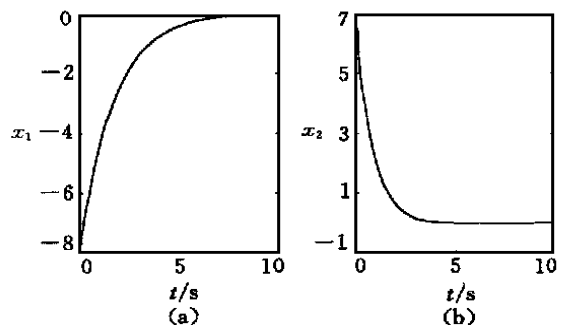


图 2 状态变量变化

(a) x_1 的变化 (b) x_2 的变化

- 245.747 2]; $R_6, R_7: [-908.979 6, -494.571 8]$ 。即对任意的 $x \in S_i$, 恒有 $x^T D_i x < 0$, 定理 3 的条件成立, 从而系统大范围渐近稳定。在初始条件 $x(0) = (-8, 7)$ 时, 状态变量变化如图 2 所示。

6 结 论

本文给出了简化的连续状态模糊控制系统渐近稳定和大范围渐近稳定的充要条件, 统一了目前这方面有关充分性和必要性的结论。进一步给出了基于梯度的寻求稳定模糊控制的有效算法, 仿真实例表明本文所给出算法的优越性。

参考文献:

- [1] 孙增圻, 张再兴, 邓志东. 智能控制理论及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997.
- [2] Tong R M. Some properties of fuzzy feedback systems [J]. IEEE Trans on Syst, Man and Cyber, 1980, 10(6): 327-330.
- [3] Chen J Q, Lu J H, Chen L J. Analysis and synthesis of fuzzy closed-loop control systems[J]. IEEE Trans on

- Syst, Man and Cyber, 1995, 25(5): 881-888.
- [4] Tanaka K, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45(2): 135-156.
- [5] Cao S G, Rees N W, Feng G. Quadratic stability analysis and design of continuous-time fuzzy control systems [J]. Int J Syst Sci, 1996, 27(2): 193-203.
- [6] Cao S G, Rees N W, Feng G. Further results about quadratic stability of continuous-time fuzzy control systems[J]. Int J Syst Sci, 1997, 28(4): 397-404.
- [7] Kim W C, Ahn S C, Kwon W H. Stability analysis and stabilization of fuzzy state space models[J]. Fuzzy Sets and Syst, 1995, 71(2): 131-142.
- [8] Ma X J, Sun Z Q, He Y Y. Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer[J]. IEEE Trans on Fuzzy Syst, 1998, 6(1): 41-51.
- [9] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control[J]. IEEE Trans on Syst, Man and Cyber, 1985, 15(1): 116-132.
- [10] Thathachar M A L, Viswanath P. On the stability of fuzzy systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy Syst, 1997, 5(1): 145-151.

2001 年中国过程控制年会征文通知

2001 年中国过程控制年会将于 2001 年 8 月在辽宁省沈阳市召开。本次会议由中国自动化学会过程控制专业委员会主办, 东北大学自动化研究中心和中南大学信息科学与工程学院承办。

征文范围: (1) 过程建模、仿真与辨识; (2) 鲁棒控制、预测控制、模糊控制、神经网络控制、自适应控制、智能控制、推理控制等过程控制的新理论、新方法、新技术及其应用成果; (3) 工业过程优化控制技术与管控一体化技术; (4) 过程检测与控制装置; (5) 故障诊断与容错控制技术; (6) 模式识别与图像处理技术; (7) DCS, CIPS 和 FB 控制系统等。

论文要求: (1) 未在正式刊物和会议上发表过; (2) 用 Word 97 排版, 小 4 号仿宋体字, A4 纸打印, 篇幅在 5 页以内; (3) 激光打印稿一式两份, 如有照片, 请提供原件, 文中留空白; (4) 注明邮编、详细通讯地址、工作单位、联系电话、E-mail 地址。

论文出版: 所录用的论文将于会前分别以《控制理论与应用》、《系统仿真学报》和《基础自动化》增刊的形式发表。

截稿日期: 2001 年 3 月 20 日

来稿请寄: 110006 沈阳市东北大学自动化研究中心过程年会秘书组收

联系人: 周晓杰, 岳 恒

联系电话: 024-23968260, 024-23968252

电子邮件: xpli@mail.neu.edu.cn

中国自动化学会过程控制专业委员会
东北大学自动化研究中心
中南大学信息科学与工程学院