

文章编号: 1001-0920(2001)01-0047-04

时滞不确定组合大系统的鲁棒分散镇定

刘粉林¹, 刘媛¹, 王银河², 张嗣瀛²

(1. 解放军信息工程大学 信息安全学院, 河南 郑州 450002; 2. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110006)

摘要: 将 Riccati 方法扩展到具有状态和输入时滞的不确定组合系统, 给出了系统经状态反馈分散二次镇定的一个充分条件, 并证明该条件的成立等价于一个 LMI 最优解的存在。利用 LMI 最优解, 给出了分散控制器的设计方案。仿真结果表明了该方法的有效性。

关键词: 时滞; 不确定大系统; LMI; 二次稳定

中图分类号: TP 273 文献标识码: A

Decentralized Robust Control for Uncertain Delay Composite Systems

LIU Fen-lin¹, LIU Yuan¹, WANG Yin-he², ZHANG Si-ying²

(1. College of Information Safety, PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450002, China;
2. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110006, China)

Abstract: The Riccati method is extended to a class of composite systems with the state delay and input delay. A sufficient condition of quadratically decentralized stabilization is obtained. It is proved that the condition is equivalent to the existence of the optimal solution to a linear matrix inequality (LMI). By using the optimal solution to LMI, the design scheme of quadratically decentralized stabilization is proposed. The simulation result shows the effectiveness of the proposed method.

Key words: time-delay; uncertain large-scale systems; LMI; quadratically stabilizable

1 引 言

时变范数有界不确定系统经状态反馈镇定问题的研究已有大量结果^[1~9]。文献[1, 2]讨论了线性非时滞系统, 并要求系统的不确定性满足通常的匹配条件; [3]讨论了线性时滞系统, 但仍要求不确定项满足匹配条件; [4, 5]对不确定项不满足匹配条件的情形进行讨论, 利用 Riccati 方程的解构造出线性静态状态反馈控制器; [6~9]则将 Riccati 方法扩展到时滞系统, 其中[6, 7]讨论了只有状态时滞的一般系

统; [8]针对只有状态时滞的不确定大系统, 给出了分散控制器的设计方法, 并要求系统的不确定项满足线性增长条件; [9]就同时含状态时滞和输入时滞的一般系统, 给出了无记忆状态反馈控制器存在的一个充分条件。然而关于含状态时滞和输入时滞不确定大系统的分散镇定问题, 目前尚未见报道。

本文将 Riccati 方法扩展到具有常值状态时滞和输入时滞的不确定组合大系统, 假定系统的状态信息可以获取, 系统的不确定项是范数有界的。基于 Riccati 方法, 给出了系统可经状态反馈分散二次稳

收稿日期: 1999-03-31; 修回日期: 1999-09-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(69774005); 教育部博士点基金项目(97014508); 国家攀登计划项目

作者简介: 刘粉林(1964—), 男, 江苏溧阳人, 博士, 从事复杂控制系统的结构性分析、鲁棒控制等研究; 张嗣瀛(1925—), 男, 山东章丘人, 中国科学院院士, 博士生导师, 从事复杂控制系统的结构性分析、微分对策等研究。

定的一个充分条件;基于 Schur 算法,给出了充分条件成立等价于一个 LMI 最优解的存在;利用 LMI 最优解计算分散控制律,从而给出分散镇定控制器。该方法的优点在于无需关注系统不确定参数的变化就能有效地计算出控制增益。

2 系统描述和预备知识

考虑由下述 N 个不确定时滞系统经互联而成的组合大系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & (A_i + \Delta A_i(t))x_i(t) + \\ & (A_{i1} + \Delta A_{i1}(t))x_i(t - d_i) + \\ & (B_i + \Delta B_i(t))u_i(t) + \\ & (B_{i1} + \Delta B_{i1}(t))u_i(t - h_i) + \\ & \sum_{j=1}^N \Delta H_{ij}(t)x_j(t) \end{aligned} \quad (1a)$$

$$x_i(t) = \xi_i(t), \quad t \in [-\max\{d_i, h_i\}, 0] \quad (1b)$$

其中, $x_i(t) \in R^{n_i}$ 和 $u_i(t) \in R^{m_i}$ 分别为第 i 个子系统的状态和控制输入; A_i, A_{i1}, B_i 和 B_{i1} 是具有相应维数的已知常值矩阵; $\Delta A_i(t), \Delta A_{i1}(t), \Delta B_i(t)$ 和 $\Delta B_{i1}(t)$ 是具有相应维数的关于 t 分段连续的函数矩阵,分别描述了第 i 个子系统关于状态和输入增益的不确定性; d_i 和 h_i 是非负常数,分别表示状态和控制输入的时滞; $\xi_i(t) \in C^n[-\tau, 0]$, $\tau = \max\{d_i, h_i\}$ 是连续的矢量初始函数。

这里考虑系统(1)的不确定项满足下列条件

$$\begin{aligned} [\Delta A_i(t), \Delta B_i(t)] &= D_i F_i(t) [E_i, N_i] \\ \Delta A_{i1}(t) &= D_{i1} F_i(t) E_{i1}, \quad \Delta B_{i1}(t) = D_{i2} F_i(t) N_{i1} \\ \Delta H_{ij}(t) &= M_{ij} L_{ij}(t) H_j \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $D_i, D_{i1}, D_{i2}, E_i, E_{i1}, N_i, N_{i1}, M_{ij}, H_j (i, j = 1, 2, \dots, N)$ 是已知的实常数矩阵; $F_i(t)$ 是具有适当维数的未知函数矩阵,其元素是 Lebesgue 可测的; $L_{ij}(t)$ 是 $L_2(0, \infty)$ 空间中的未知函数矩阵。 $F_i(t)$ 和 $L_{ij}(t)$ 满足下列条件

$$F_i^T(t)F_i(t) \leq I, \quad G_i^T G_i \leq I \quad (3)$$

$$G_i = [L_{i1}, \dots, L_{i(i-1)}, L_{i(i+1)}, \dots, L_{iN}] \quad (3)$$

定义 1 称不确定时滞系统(1)~(3)是可鲁棒分散二次稳定的,如果存在分散反馈控制律 $u_i(t) = K_i x_i(t)$, 正定矩阵 $P_i \in R^{n_i \times n_i}$, 半正定矩阵 $R_{i1}, R_{i2} \in R^{n_i \times n_i}$ 和正常数 $\alpha > 0$, 使得对于所有容许参数不确定性 $F_i(t), L_{ij}(t)$, 下列 Lyapunov 函数

$$V(x(t), t) = \sum_{i=1}^N \left[x_i^T P_i x_i + \int_{t-d_i}^t x_i^T(s) R_{i1} x_i(s) ds + \int_{t-h_i}^t x_i^T(s) R_{i2} x_i(s) ds \right] \quad (4)$$

沿分散控制律 $u_i(t) = K_i x_i(t)$ 和系统(1)~(3)构成的闭环系统的导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), t) &\leq -\alpha V(x(t), t) \\ &\leq -R^n \times R \end{aligned} \quad (5)$$

此时称 $u_i(t) = K_i x_i(t)$ 为鲁棒分散二次稳定控制器。

引理 1 记

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M_1 L_{12} H_1 & \dots & M_1 L_{1N} H_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_N L_N H_1 & \dots & M_N L_N H_{N-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & L_{12} & \dots & L_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{N1} & \dots & L_{N(N-1)} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_N \end{bmatrix}$$

由式(3)知,对任意正定矩阵 $P = \text{diag}[P_1, P_2, \dots, P_N]$, $P_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 具有相应维数,任意正常数 $\epsilon > 0 (i = 1, 2, \dots, N)$, 使得

$$A^T P + P A + \sum_{i=1}^N \epsilon \text{diag}[0, \dots, P_i M_i M_i^T P_i, \dots, 0] + \frac{1}{\epsilon} \text{diag}[H_1^T H_1, \dots, H_{i-1}^T H_{i-1}, 0, H_{i+1}^T H_{i+1}, \dots, H_N^T H_N] \quad (6)$$

证明略。

3 鲁棒分散镇定控制器的设计

本节将给出不确定系统(1)~(3)可鲁棒分散二次稳定的一个充分条件,并得出该条件等价于一个 LMI 最优问题的可解性,从而容易得出使系统(1)~(3)分散二次稳定的状态反馈控制器。

定理 1 考虑不确定时滞大系统(1)~(3), 设 $R_i \in R^{n_i \times n_i}$ 是给定的正定矩阵, 若对所有的容许不确定参数 $F_i(t), L_{ij}(t)$, 存在矩阵 $K_i \in R^{m_i \times n_i}$, 正定矩阵 $P_i \in R^{n_i \times n_i}$ 和正常数 $\epsilon > 0$, 使得

$$S_i = (A_i - B_i K_i)^T P_i + P_i (A_i - B_i K_i) + P_i W_i P_i + Q_i < 0 \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} W_i &= D_i D_i^T + A_{i1} R_{i1}^T A_{i1}^T + D_{i1} D_{i1}^T + \\ & D_{i2} D_{i2}^T + B_{i1} B_{i1}^T + \epsilon M_i M_i^T \\ Q_i &= (E_i - N_i K_i)^T (E_i - N_i K_i) + K_i^T K_i + \\ & R_i + E_{i1}^T E_{i1} + K_i^T N_{i1}^T N_{i1} K_i + \left[\sum_{j=1}^N \frac{1}{\epsilon} \right] H_i^T H_i \end{aligned}$$

则系统(1)~(3)是二次稳定的,其分散二次稳定控

制器为

$$u_i = K_i x_i \quad (8)$$

证明略。

下面考虑式(7)。因为 P_i 是正定矩阵, 所以 P_i^{-1} 存在, 则式(7) 可变换为下列矩阵不等式

$$F_{i1} + P_i F_{i2}^T F_{i2} P_i + T_i^T F_{i3}^T F_{i3} T_i + F_{i4}^T F_{i4} + \bar{P}_i \bar{R}_i^{-1} P_i < 0 \quad (9)$$

其中

$$R_i = R_i^{-1}, \quad P_i = P_i^{-1}, \quad T_i = K_i P_i^{-1}$$

$$F_{i1} = A_i \bar{P}_i + \bar{P}_i A_i^T - B_i T_i - T_i^T B_i^T + W_i$$

$$F_{i2}^T = \begin{bmatrix} E_{i1}^T, & \overbrace{\frac{1}{\epsilon} H_i^T}^N \\ & j \quad i \end{bmatrix}$$

$$F_{i3}^T = [I_i, N_i^T], \quad F_{i4} = E_i P_i - N_i T_i$$

W_i 在定理 1 中给出, $I_i \in R^{m_i \times m_i}$ 是单位矩阵。下面以定理的形式给出分散反馈控制增益 K_i 的具体表达式。

定理 2 考虑系统(1) ~ (3), 该系统满足式(7) 的充要条件是存在矩阵 $T_i \in R^{m_i \times n_i}$, 正定矩阵 $\bar{P}_i, \bar{R}_i \in R^{n_i \times n_i}$, 使得下列 LMI 满足

$$\begin{bmatrix} F_{i1} & P_i F_{i2}^T & T_i^T F_{i3}^T & F_{i4}^T & P_i \\ F_{i2} \bar{P}_i & -I_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ F_{i3} T_i & 0 & -I_{i2} & 0 & 0 \\ F_{i4} & 0 & 0 & -I_{i3} & 0 \\ P_i & 0 & 0 & 0 & -R_i \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

进而, 若 LMI 最优问题存在, 则鲁棒分散二次稳定控制器的增益可由下式给出。

$$K_i = T_i P_i^{-1} = T_i P_i \quad (11)$$

其中 I_{i1}, I_{i2}, I_{i3} 是具有相应维数的单位矩阵。

证明 令 $\bar{A}_i = F_{i1}, B_i = [P_i F_{i2}^T, T_i^T F_{i3}^T, F_{i4}^T, \bar{P}_i], \Delta_i = \text{diag}[-I_{i1}, -I_{i2}, -I_{i3}, -\bar{R}_i]$, 则式(10) 变为

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i & B_i \\ B_i^T & \Delta_i \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

利用 Schur 变换方法得

$$\begin{bmatrix} I & -\bar{B}_i \Delta_i^{-1} \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_i & B_i \\ B_i^T & \Delta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \\ & -\Delta_i^{-1} B_i^T & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_i - \bar{B}_i \Delta_i^{-1} B_i^T & \\ & \Delta_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

由 \bar{A}_i 的表达式可知 \bar{A}_i 为对称矩阵, 因而式(12) 的左边是对称矩阵, 从而式(12) 成立的充分必要条件是

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i - B_i \Delta_i^{-1} B_i^T & \\ & \Delta_i \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

由式(13) 知式(14) 成立的充分必要条件是

$$\bar{A}_i - B_i \Delta_i^{-1} B_i^T < 0 \quad (15)$$

即式(9) 成立, 也就是式(7) 成立。(证毕)

基于定理 2 和上述分析, 可给出鲁棒分散二次稳定控制器的设计步骤:

1) 判别 LMI(10) 是否有解, 若有解, 则确定出 P_i, R_i, T_i 和 ϵ , 转入下一步; 否则该设计方法失效;

2) 根据 1) 求得的解, 利用式(11) 给出控制增益, 从而给出分散镇定控制器。

4 仿真算例

考虑由两个时滞不确定系统互联而成的组合系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (A_1 + \Delta A_1)x_1(t) + (B_1 + \Delta B_1)u_1(t) + \\ & (A_{11} + \Delta A_{11})x_1(t - 3) + \\ & (B_{11} + \Delta B_{11})u_1(t - 5) + \Delta H_{12}x_2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= (A_2 + \Delta A_2)x_2(t) + (B_2 + \Delta B_2)u_2(t) + \\ & (A_{21} + \Delta A_{21})x_2(t - 1) + \\ & (B_{21} + \Delta B_{21})u_2(t - 1.5) + \Delta H_{21}x_1(t) \end{aligned}$$

$$x_1(t) = [0.5, 0.5]^T, \quad t \in [-5, 0]$$

$$x_1(t) = [x_{11}(t), x_{12}(t)]^T$$

$$x_2(t) = 0, \quad t \in [-1.5, 0]$$

$$x_2(t) = [x_{21}(t), x_{22}(t)]^T$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A_1 = \begin{bmatrix} 0.1r(t) & 0.1r(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1s(t) \end{bmatrix}$$

$$\Delta A_{11} = \begin{bmatrix} 0.1v(t) & 0.1v(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta B_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1z(t) \end{bmatrix}$$

$$\Delta H_{12}(t) = \begin{bmatrix} 0.1h(t) & 0.1h(t) \\ 0.1h(t) & 0.1h(t) \end{bmatrix}$$

$$|r(t)|, |s(t)|, |v(t)|, |z(t)|, |h(t)| \leq 1$$

$$\Delta A_2 = \Delta A_{21} = \begin{bmatrix} 0.1f(t) & 0.1f(t) \\ 0.1f(t) & 0.1f(t) \end{bmatrix}$$

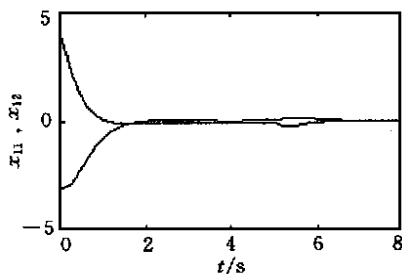


图1 子系统1的状态响应

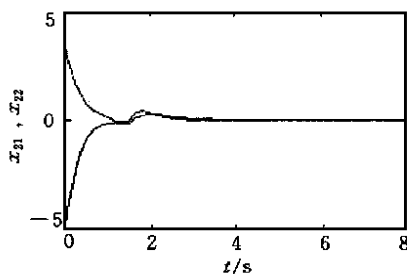


图2 子系统2的状态响应

$$\Delta B_2 = \Delta B_{21} = \begin{bmatrix} 0.1f(t) \\ 0.1f(t) \end{bmatrix}$$

$$\Delta H_{21} = \begin{bmatrix} 0.1g(t) & 0.1g(t) \\ 0.1g(t) & 0.1g(t) \end{bmatrix}, \quad |f(t)|, |g(t)| \leq 1$$

对不确定项进行如下分解

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$D_{11} = D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad N_1 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$N_{11} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T, \quad M_1 = [0.1 \quad 0.1]^T$$

$$H_2 = [1 \quad 1], \quad L_{12}(t) = h(t)$$

$$F_1(t) = \text{diag}[r(t) \quad s(t) \quad v(t) \quad z(t)]$$

$$D_2 = D_{21} = D_{22} = [0.1 \quad 0.1]^T$$

$$E_2 = E_{21} = [1 \quad 1], \quad N_2 = N_{21} = 1, \quad M_2 = 0.1$$

$$H_1 = I_{2 \times 2}, \quad F_2(t) = f(t), \quad L_{21}(t) = g(t)$$

利用 Matlab tool 可得反馈增益为

$$K_1 = - [0.625 \ 6 \quad 0.111 \ 5]$$

$$K_2 = - [0.213 \ 5 \quad 4.710 \ 9]$$

则控制器为

$$u_1 = - 0.625 \ 6x_{11} - 0.111 \ 5x_{12}$$

$$u_2 = - 0.213 \ 5x_{21} - 4.710 \ 9x_{22}$$

取不确定参数为 $r(t) = s(t) = v(t) = z(t) =$

$h(t) = f(t) = g(t) = \sin t$, 初始值为 $x_{10} = [4.5 \ -3]$, $x_{20} = [3.5 \ -5]$ 。利用 Matlab 进行仿真, 结果如图 1 和图 2 所示。仿真结果进一步表明本文方法是有效的。

5 结 语

本文给出了含状态时滞和输入时滞不确定组合大系统的分散二次稳定控制器的设计方法。基于二次稳定的概念, 采用 Riccati 方法, 给出了可分散二

次稳定的一个充分条件; 基于 Schur 算法, 得出了该充分条件成立等价于一个 LMI 最优解的存在; 利用 LMI 最优解给出了控制增益。仿真实例进一步表明了本文方法的有效性。

参考文献:

- [1] Barmish B R, Corless M, Leitmann G. A new class of stabilizing controllers of an uncertain linear system[J]. SIAM J of Control, 1983, 21(2): 246-252.
- [2] Gong G, Wen C, Mital D P. Decentralized robust control design for a class of interconnected uncertain systems: With unknown bound of uncertainty[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1996, 41(6): 850-854.
- [3] Hasanul B, Mukundan A M R, Connor D A O. Memoryless feedback control in uncertain dynamic delay system[J]. Int J of Syst Sci, 1986, 17(4): 409-415.
- [4] Petersen I R, Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems[J]. Automatica, 1986, 22(3): 397-411.
- [5] Petersen I R. Disturbance attenuation and H^∞ optimization: A design method based on the algebraic Riccati equation[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1987, 32(3): 427-429.
- [6] Shen J, Chen B, Kung F. Memoryless stabilization of uncertain dynamic delay systems: Riccati equation approach[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1991, 37(8): 1022-1025.
- [7] Mahmoud M S, Al-Muthairi N F. Quadratic stabilization of continuous time systems with state-delay and norm-bound time-varying uncertainties[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1994, 39(10): 2135-2139.
- [8] Mahmoud M S, Bingulac S. Robust design of stabilizing controllers for interconnected time-delay systems[J]. Automatica, 1998, 34(6): 795-800.
- [9] Kim J H, Jeung E T, Park H B. Robust control for parameter uncertain delay systems in state and input[J]. Automatica, 1996, 32(9): 1337-1339.