

文章编号: 1001-0920(2001)01-0090-04

基于 Backstepping 方法的多变量系统自适应控制

武玉强¹, 李洪亮¹, 孙海龙¹, 余星火²

(1. 曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165; 2. 中昆士兰大学 信息与通信学院, 澳大利亚 中昆士兰)

摘要: 基于 Backstepping 设计方法, 对线性多变量系统设计出一种新的自适应控制器, 使某些系统关于增益矩阵的假定条件便于检验。该控制器能保证系统的全局稳定性和跟踪误差趋于零。

关键词: 多变量系统; Backstepping 方法; 全局稳定性; 输出跟踪

中图分类号: TP 13 文献标识码: A

Adaptive Controller for Linear Multivariable Systems Based on the Backstepping Approach

WU Yu-qiang¹, LI Hong-liang¹, SUN Hai-long¹, YU Xing-huo²

(1. Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu 273165, China;

2. Faculty of Information and Communication, Central Queensland University, Australia)

Abstract: An adaptive control scheme based on the backstepping approach is proposed for linear time-invariant MIMO systems. The assumption on a priori knowledge of the gain matrix can be easily checked for certain plants. Under this scheme, the global stability of the closed-loop system is guaranteed and the tracking error tends to zero.

Key words: multivariable systems; backstepping approach; global stability; output tracking

1 引言

对于线性多变量系统, 当不存在未建模动态和扰动时, 模型参考自适应控制方法可以保证系统是全局渐近稳定的^[1-3]。控制器的设计主要是基于辅助误差信号的线性控制方法。当广义相对阶大于 1 时, 上述设计机制通常较为复杂。Backstepping 方法对带有参数严格反馈形式的非线性系统是有效的。基于 Backstepping 方法, 文献[4]研究了线性单输入单输出系统; [5]研究了线性时不变多输入多输出系统; [6]研究了线性时变系统; [7]对单输入单输出

系统的鲁棒自适应控制进行了研究。迄今为止, 对于多输入多输出系统的自适应控制设计, 必须已知某一相互作用矩阵和一可逆矩阵, 使得增益矩阵是正定的。如何降低这一假设条件, 对多变量系统的自适应控制设计是非常重要的。

本文利用 Backstepping 方法, 对线性多输入多输出系统提出一种新的自适应控制设计机制。动态误差系统不是通过构造状态观测器, 高频增益矩阵不需要正定性假设, 而用三角矩阵代替正定矩阵。控制器可以递归设计, 系统的全局稳定性得以保证, 跟踪误差渐近趋向原点。

收稿日期: 1999-12-02; 修回日期: 2000-04-11

基金项目: 国家自然科学基金项目(69674001); 山东省自然科学基金项目(Q99G04)

作者简介: 武玉强(1962—), 男, 山东沂水人, 教授, 博士, 从事自适应控制、变结构控制等研究; 余星火(1959—), 男, 澳大利

2 系统描述

考虑多输入多输出线性时不变系统

$$y = G(s)u = N_0(s)D_0^{-1}(s)u + D_1^{-1}(s)N_1(s)u \quad (1)$$

其中, $G(s)$ 是用右矩阵分式和左矩阵分式描述的传递函数矩阵, $D_0(s)$ 和 $D_1(s)$ 是首一的 n 阶矩阵多项式, $N_0(s)$ 和 $N_1(s)$ 是 m 阶矩阵多项式。如果选择 $(s+1)^{n-m}I$ 使得 $\lim_{s \rightarrow \infty} (s+1)^{n-m}IG(s) = B_m$, 当 B_m 非奇异时, 定义系统(1)的相对阶为 $n^* = n - m_0$ 。对于 B_m 奇异的情形, 若存在一个互作用多项式矩阵 $P(s)$ ($P(s)$), 满足 $\lim_{s \rightarrow \infty} P(s)G(s) = K_n$, $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)P(s) = \bar{K}_n$, 其中 K_n (\bar{K}_n) 是满秩的常数矩阵, 则称 $P(s)$ 的阶为 $G(s)$ 的广义相对阶^[8]。对系统(1)做如下假设:

A₁: 传递函数 $G(s)$ 是严格正则的, 即 $m < n$, 且 $G(s)$ 的可观测性指数的上界 n 已知, n^* 已知;

A₂: $N_0(s)$ 和 $N_1(s)$ 是 Hurwitz 多项式矩阵;

A₃: 存在已知的互作用多项式矩阵 $P(s)$, 满足 $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)P(s) = \bar{K}_n$, 其中 \bar{K}_n 非奇异;

A₄: 存在已知的非奇异矩阵 H , 使 $H\bar{K}_n$ 是下三角或上三角矩阵, 且对角线元素的符号已知。

控制目的是设计自适应控制器, 使系统(1)的输出 $y(t)$ 渐近跟踪参考信号 $y_m(t)$, 且使闭环系统的所有信号有界。这里 $y_m(t)$ 及其直到 n^* 阶导数是有界可测的。定义跟踪误差

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (2)$$

由于 $\bar{P}(s)$ 已知, 选择 $h(s) = (s + \alpha)^{n^*}$, $\alpha > 0$ 。令

$$u(t) = h^{-1}(s)\bar{P}(s)v(t) \quad (3)$$

将 $N_1(s)P(s)$ 表示为 $N_1(s)P(s) = K_n s^n + K_{n-1} s^{n-1} + \dots + K_0$, $D_1^{-1}(s)N_1(s)P(s)$ 的右分式矩阵为

$$\begin{cases} D_1^{-1}(s)N_1(s)P(s) = \bar{N}_1(s)\bar{D}_1^{-1}(s) \\ \bar{N}_1(s) = B_n s^n + \dots + B_0 \end{cases} \quad (4)$$

因为 K_n 非奇异, 由式(4)易证 \hat{B}_n 非奇异, 且 $\hat{B}_n = \bar{K}_n$ 。由式(4)和(3)得

$$y(t) = h^{-1}(s)\bar{N}_1(s)\bar{D}_1^{-1}(s)v(t) \quad (5)$$

引理 1^[11] 假设式(5)的可观测指数的上界 n 已知, 则存在多项式矩阵 $Q_1(s)$ 和 $R_1(s)$, 其阶分别为 $n-2$ 和 $n-1$ (或小于 $n-1$), 且满足

$$\begin{aligned} Q_1(s)h(s)\bar{D}_1(s) + R_1(s)\bar{N}_1(s) = \\ Q_2(s)[h(s)\bar{D}_1(s) - G^*F(s)\bar{N}_1(s)] \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $Q_2(s) = (s + \alpha)^{n-1}I_{p \times p}$ ($\alpha > 0$), $G^* = \hat{B}_n^{-1}$, $F(s)$ 满足 $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s)\bar{N}_1(s) = B_n$ 。

由引理 1 并经变换可得

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = -\alpha e(t) + \frac{\hat{B}_n}{(s + \alpha)^{n^*-1}}v(t) + \\ \theta^T \Psi_0(t) \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\Psi_0(t)$ 由 $v(t)$ 和 $y(t)$ 稳定的 $(n^* - 1)$ 阶滤波信号和 $y_m(t)$ 及其高阶导数组成。

3 自适应控制器设计

由假设 A₄, 存在一个已知矩阵 H , 满足 $H\hat{B}_n$ 是上三角或下三角矩阵。不失一般性, 假设 \hat{B}_n 为下三角矩阵。令 $B_n = [b_{11}, b_{12}, \dots, b_{pp}]^T$, 其中 $b_i^T = [b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ii}, 0, \dots, 0]$ 。式(7)的第 1 个分量对应的方程为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) = -\alpha e_1(t) + \theta_1^T \Psi_0(t) + \\ b_{11} \frac{1}{(s + \alpha)^{n^*-1}}v_1(t) \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $v_1(t)$ 是 $v(t)$ 的第 1 个分量, θ_1^T 是 θ^T 的第 1 个行向量。由假设 A₄, b_{11} 的符号已知。对于式(8), 定义

$$x_{11}(t) = \frac{1}{(s + \alpha)^{n^*-1}}v_1(t) \quad (9)$$

其状态空间实现连同式(8)记为

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = -\alpha e_1(t) + b_{11}x_{11}(t) + \theta_1^T \Psi_0(t) \\ \dot{x}_{11} = x_{12}, \quad x_{1, n^*-2} = x_{1, n^*-1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{1, n^*-1} = -\beta_1 x_{11} - \dots \\ \quad - \beta_{1, n^*-1} x_{1, n^*-1} + v_1 \end{cases} \quad (10)$$

其中 $\beta_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n^* - 1$) 是多项式 $(s + \alpha)^{n^*-1}$ 的系数, 采用状态变换

$$\begin{cases} z_{10}(t) = e_1(t) \\ z_{11}(t) = x_{11}(t) - \alpha^{i0}(t) \\ \vdots \\ z_{1, n^*-1}(t) = x_{1, n^*-1}(t) - \alpha^{i, n^*-2}(t) \end{cases} \quad (11)$$

其中 $\alpha_i(t)$ ($i = 0, 1, \dots, n^* - 1$) 是中间控制函数。对于第 $i+1$ 步, 可证明

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1i} = \dot{x}_{1i} - \dot{\alpha}_{i, i-1} = \\ z_{1, i+1} + \alpha_i - \frac{\partial \alpha_{i, i-1}}{\partial z_{10}} (-\alpha z_{10} + b_{11}x_{11}) - \\ \frac{\partial \alpha_{i, i-1}}{\partial z_{10}} \theta_1^T \Psi_0(t) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i, i-1}}{\partial z_{1j}} x_{1, j+1} - \\ \frac{\partial \alpha_{i, i-1}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \alpha_{i, i-1}}{\partial b_{11}} \hat{b}_{11} - \frac{\partial \alpha_{i, i-1}}{\partial \theta} \hat{\theta}_1 \end{aligned} \quad (12)$$

对此, 选取中间控制函数

$$\begin{aligned} \alpha_i(t) = \\ -z_{1i} - z_{1, i-1} + \frac{\partial \alpha_{i, i-1}}{\partial \alpha} - \alpha \frac{\partial \alpha_{i, i-1}}{\partial z_{10}} z_{10} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{1,i-1}}{\partial x_{1j}} x_{1,j+1} - z_{1i} \left[\frac{\partial \alpha_{1,i-1}}{\partial z_{10}} \right]^2 + \hat{\theta}_i^T(t) \Psi_{1i}(t) + \\ & \hat{b}_{11}(t) \frac{\partial \alpha_{1,i-1}}{\partial z_{10}} x_{11} + \sigma_{1,i-1} + \tau_{1,i-1} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{1i}(t) &= \frac{\partial \alpha_{1,i-1}}{\partial z_{10}} \Psi_0(t) \\ \tau_{1,i-1} &= - \sum_{j=1}^i (\Psi_{i-1}^T(t) z_{1j} \Psi_j(t)) - \sum_{j=1}^{i-1} \Psi_j^T(t) z_{1,j+1} \Psi_i(t) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,i-1} &= - \frac{\partial \alpha_{1,i-1}}{\partial b_{11}} \left[- z_{10} z_{11} + \sum_{j=1}^i \left(\frac{\partial \alpha_{1,j-1}}{\partial z_{10}} x_{11} z_{1j} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial \alpha_{1,i-1}}{\partial z_{10}} x_{11} \left[\sum_{j=1}^i \left(\frac{\partial \alpha_{1,j}}{\partial b_{11}} z_{1,j+1} \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (15)$$

取李亚普诺夫函数 $V_{1i}(t) = \frac{1}{2} z_{1i}^2(t)$, 自适应控制器

$$\begin{aligned} v_1(t) & \text{ 的第 1 个分量 } v_1(t) \text{ 为} \\ v_1(t) &= \alpha_{1,n^*-1}(t) = \\ & - \sum_{j=1}^{n^*-1} \beta_j x_{1j}(t) - z_{1,n^*-1} - z_{1,n^*-2} + \\ & \frac{\partial \alpha_{1,n^*-2}}{\partial z_{10}} - \alpha \frac{\partial \alpha_{1,n^*-2}}{\partial z_{10}} z_{10} + \sum_{j=1}^{n^*-2} \frac{\partial \alpha_{1,n^*-2}}{\partial x_{1j}} x_{1,j+1} - \\ & z_{1,n^*-1} \left[\frac{\partial \alpha_{1,n^*-2}}{\partial z_{10}} \right]^2 + \hat{\theta}_1^T \Psi_{1,n^*-1}(t) + \\ & \hat{b}_{11} \frac{\partial \alpha_{1,n^*-2}}{\partial z_{10}} x_{11} + \sigma_{1,n^*-2} + \tau_{1,n^*-2} \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\hat{b}_{11}(t)$ 和 $\hat{\theta}_1(t)$ 的自适应律选为

$$\begin{cases} \hat{b}_{11}(t) = - \sum_{j=1}^{n^*-1} \left[\frac{\partial \alpha_{1,j-1}}{\partial z_{10}} x_{11} z_{1j} \right] \\ \hat{\theta}_1(t) = - \sum_{j=1}^{n^*-1} (z_j \Psi_j(t)) \end{cases} \quad (17)$$

为证明在自适应控制 (16) 下系统 (10) 的稳定性, 选取李亚普诺夫函数

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \sum_j^{n^*-1} (V_{1,j-1}(t)) + \tilde{b}_{11}(t) \tilde{b}_{11}(t) / 2 + \\ & \tilde{\theta}_1^T(t) \tilde{\theta}_1(t) / 2 \end{aligned} \quad (18)$$

$V_1(t)$ 关于动态 $z_{1,j-1}(t) (j = 1, 2, \dots, n^*)$, $\hat{b}_{11}(t)$ 和 $\hat{\theta}_1(t)$ 的时间导数满足下列方程

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= - z_{10}^2(t) - \dots - z_{1,n^*-1}^2(t) - \\ & \sum_{j=1}^{n^*-1} \left[z_{1,j}^2(t) \left[\frac{\partial \alpha_{1,j-1}}{\partial z_{10}} \right]^2 \right] \end{aligned} \quad (19)$$

这表明 $z_{1j}(t)$, $\hat{\theta}_1(t)$, $\hat{\theta}_1(t)$, $\hat{b}_{11}(t)$ 是有界的, 因而 $e_1(t)$ 和 $y_1(t)$ 也是有界的。一般地, 因为 $v_{j-1}(t) (j = 1, 2, \dots, i-1)$ 已在前 $j-1$ 步被设计, 且 $x_{j1}(t) (j = 1, 2, \dots, i-1)$ 直到 (n^*-1) 阶导数存在且可测, 所

以可用相似 $v_i(t)$ 的过程设计 $v_i(t)$, 并保证 $e_i(t)$ 和 $y_i(t)$ 的有界性。以上分析可综合成下述定理:

定理 1 对于系统 (1), 若条件 $A_1 \sim A_4$ 满足, 控制律 $u(t)$ 由式 (3) 给出, 其中 $v(t)$ 的第 1 个分量 $v_1(t)$ 由式 (16) 给定, 对其它分量 $e_i(t)$, 其状态变换和中间控制函数以及控制分量 $v_i(t)$ 用类似方式定义。则闭环系统中的所有信号有界, 且跟踪误差 $e(t)$ 趋近于零。如果参考信号 $y_m(t)$ 恒为零, 则闭环系统的所有信号趋向于零。

证明 对于整个闭环系统, 根据上述推导, $e_i(t)$ 和 $y_i(t) (i = 1, 2, \dots, p)$ 是有界的。由式 (5) 可得控制律 $v(t)$ 的第 n^* 阶稳定滤波信号也是有界的。事实上, 由式 (5) 得到

$$v(t) = h(s) D_1(s) \bar{N}_1^{-1}(s) y(t) \quad (20)$$

因为 $\det(\bar{N}_1(s))$ 是 Hurwitz 多项式, 且 $\bar{N}_1(s)$ 和 $D_1(s)$ 有相同的阶, 则对任意稳定的 n^* 阶多项式 $L(s)$, $[1/L(s)] v(t) = [h(s)/L(s)] D_1(s) \bar{N}_1(s) y(t)$ 有界, 因此 $\Psi_0(t)$ 也有界, 这又保证 $\alpha_0(t)$ 有界。由上节推导, $\theta_{11}(t)$, $\theta_1(t)$ 和 $x_{11}(t)$ 都是有界的。同理第 i 个跟踪误差 $e_i(t)$ 及相应的中间控制函数有界。实际设计过程中, 在 Backstepping 方法的第 1 步, 中间控制函数的有界性可由 $e_1(t)$ 的有界性保证。最后, 按照 Backstepping 过程, $v_1(t)$ 中 $\Psi_{1,n^*-1}(t)$ 的每一个组成分量都有界, 则 $v_1(t)$ 有界。同理可依次推导 $v_2(t), \dots, v_p(t)$ 有界, 这意味着控制律 $v(t)$ 是有界的。由于 $h(s)$ 是稳定的, 且式 (3) 中 $P(s)h^{-1}(s)$ 是正则的, 因而 $u(t)$ 有界。所有信号的有界性蕴涵着 $z_{10}(t)$ 的导数和 $e_1(t)$ 是有界的。由 $V_1(t)$ 的选择以及

$$\dot{V}_1 = - z_{10}^2(t) - \dots - z_{1,n^*-1}^2(t) \quad (21)$$

即 $z_{10}(t) = e_1(t)$ 趋于零。同理 $e_i(t) (i = 1, 2, \dots, p)$ 趋于零。如果 $y_m(t) = 0$, 则跟踪问题变成调节问题。此时可证中间控制函数也逼近零, 因而可得自适应控制律 $v(t)$ 趋向零。最终控制系统的所有信号趋向于零。(证毕)

4 结 语

本文利用 Backstepping 方法对线性时不变多输入多输出系统提出一种新的自适应控制机制, 使得跟踪误差趋于零, 且只需假设系统阶的上界已知。原先存在已知矩阵 H 满足 HB_n 正定的条件被 HB_n 是下三角或上三角矩阵所代替。对于许多对象而言, 下三角(上三角)的条件比正定性易于验证。

(下转第 96 页)

敛于以下的界中

$$|x_i| \leq \frac{2^{i-1} \sqrt{2} b_2 k}{a p^{n-i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

根据控制律的表达式容易看出式(5)成立。(证毕)

4 仿真算例

研究非线性不确定系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + b(x_1, x_2)u \end{cases}$$

镇定问题。要跟踪的期望轨迹是 $X_d = [0, 0]^T$, 故 $X = \bar{X} - X_d = \bar{X}$ 。

对上述二阶系统, 假设已知 $|f(x_1, x_2)| \leq 0.2|x_2| + x_1^2$, $0.8 \leq b(x_1, x_2) \leq 1.2$ 。取 $\varphi = 0.5, p = 1$, 则 $S = x_1 + x_2$ 。仿真中取 $k_D = 8$, 初始状态 $X(0) = [0.5, 0.3]^T$ 。系统轨迹进入 $|S| \leq \varphi$ 后, 可算得 $|x_1| \leq 0.8, |x_2| \leq 1.3$ 。因此可取 $k = 2, M_f = 20, k_m = 19$, 且依 $a \geq \frac{\sqrt{2} b_2 k}{\varphi}$ 可算得 $a \geq 7$ 。两个变量的模糊区间的中心分别在区间 $[-1, 1]$ 和 $[-1.5, 1.5]$ 上均匀选定, 取自适应参数 Θ 的初始值 $\Theta(0) = 0$ 。若要求 $|x_1| \leq 0.02, |x_2| \leq 0.04$, 则由式(8)可算得 $a \geq 170$ 。

设系统未知项真值为 $f(x_1, x_2) = -0.1x_2 - x_1|x_1|, b(x_1, x_2) = 1$, 当取 $a = 170$ 时, 系统状态变量和控制量的变化曲线分别如图 1 和图 2 所示。从图中可以看出, 闭环系统跟踪误差满足要求, 且控制量变化平缓。

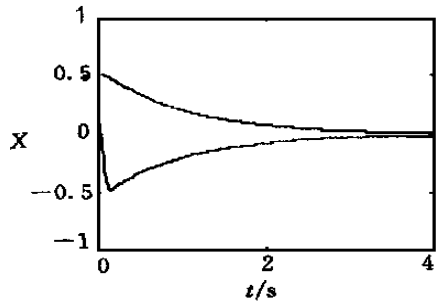


图 1 状态变量的变化

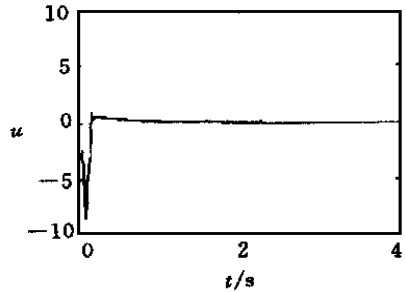


图 2 控制量的变化

参考文献:

[1] 斯洛廷. 应用非线性控制[M]. 蔡自兴, 等译. 北京: 国防工业出版社, 1992.
 [2] Slotine J J E, Sastry S S. Tracking control using sliding surfaces[J]. Int J Control, 1983, 38(2): 465-492.
 [3] Chen C S, Chen W L. Analysis and design of a stable fuzzy control system [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 96(1): 21-35.

(上接第 92 页)

参考文献:

[1] Elliott H, W A Wolovich. A parameter adaptive control structure for linear multivariable systems [J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1982, 27(5): 340-352.
 [2] Elliott H, W A Wolovich, M Das. Arbitrary adaptive pole placement for linear multivariable systems [J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1984, 29(3): 221-229.
 [3] Monopoli R V, C C Hsing. Parameter adaptive control of multivariable systems [J]. Int J of Contr, 1975, 22(3): 313-327.
 [4] Krstic M, Kanellakopoulos I, P Kokotovic. Nonlinear and adaptive control design [M]. New York: A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, 1995.

[5] Ling Y, Tao G. Adaptive backstepping control design for linear multivariable plants [A]. Proc of the 35th CDC[C]. Kobe, 1996. 2438-2443.
 [6] Zhang Y, P A Ioannou. Nonlinear control design for linear time varying systems [A]. Proc of the 35th CDC [C]. Kobe, 1996. 3353-3358.
 [7] Zhang Y, P A Ioannou. Linear robust adaptive control design using a nonlinear approach [A]. Proc of the 13th Triennial World Congress, IFAC [C]. San Francisco, 1996. 223-228.
 [8] Wolovich W A. Linear multivariable systems [M]. New York: Springer-Verlag, 1974, 295-297.