第16卷第1期 控 制 与 决 策 2001年1月
Vol 16 No. 1 CONTROL AND DECISION Jan. 2001

文章编号: 1001-0920(2001)01-0126-03

状态反馈预测控制系统的鲁棒稳定性

胡品慧, 袁 璞
(石油大学(北京) 自动化研究所, 北京 102200)

摘 要: 对状态反馈预测控制系统的鲁棒稳定性进行分析, 给出了鲁棒稳定性的充分条件。基于状态空间模型, 使用实测状态变量反馈计算最优控制律, 将参数不确定项作为前馈引入控制作用, 改善了控制系统的鲁棒性, 为状态反馈预测控制系统的分析、设计及实际应用提供了理论依据。

关键词: 预测控制; 鲁棒稳定性; H_∞控制; 状态反馈; 状态空间模型
中图分类号: O 317 **文献标识码**: A

Robustness of State Feedback Predictive Control Systems

HU Pin-hui, YUAN Pu
(Research Institue of Automation, University of Petroleum, Beijing 102200, China)

Abstract: The robustness of stabe feedback predictive control systems is studied. The robust sufficient conditions are given for the state feedback predictive control system design. By using the state space model, the detected state variable feedback control is imposed to calculate the optimal control. The parameter uncertainty terms are applied as a feed forward term. Then the robustness of the control system is improved.

Key words: predictive control; robustness; H_∞ control; state feedback; state space model

1 引 言

模型预测控制技术, 如动态矩阵控制(DMC)[1], 广义预测控制(GPC)[2,3]和状态反馈预测控制[4~7]等算法, 以其独有的模型预测、反馈校正和滚动优化等特点, 受到人们广泛的重视, 并在实际工程应用中取得了丰硕的成果[8~10]。

本文分析了状态反馈预测控制系统的鲁棒稳定性, 给出的鲁棒稳定性的充分条件为选取预测时域提供了理论依据。对比DMC, GPC 和 MC[10]等算法, 基于状态空间模型, 采用实测状态变量反馈, 有利于改善控制系统的鲁棒性。

2 主要结果

假设被控过程模型由状态空间描述如下

$$\begin{cases} x(k+1) = (A+\Delta A)x(k) + \\ \qquad\qquad (B+\Delta B)u(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \tag{1}$$

其中, $x \in R^n$, $y \in R^r$, $u \in R^r$, ΔA 和 ΔB 表示模型参数的不确定性。不失一般性, 假设矩阵 C 是行满秩的, 即 $\mathrm{rank}C = r$, 并表示为 $C = [c_1^{\mathrm{T}} \quad c_2^{\mathrm{T}} \cdots c_r^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。

使用模型预测被控变量 $y(k)$ 的未来值。在未来 p_j 采样时刻第 j 个输出预测值为

$$\hat{y}_j(k+p_j) =$$

收稿日期: 1999-12-08; **修回日期**: 2000-05-29
作者简介: 胡品慧(1959—), 男, 天津人, 副教授, 博士, 从事控制理论与应用、预测控制等研究; 袁璞(1934—), 男, 北京人, 教授, 博士生导师, 从事多变量协调预测控制、先进过程控制等研究。

$$c_j A^{p_j} x(k) + \sum_{i=1}^{p_j} c_j A^{i-1} B u(k + p_j - i)$$

$$j = 1, 2, \cdots, r \tag{2}$$

其中, r 是系统输出维数, p_j 是对第 j 个输出 $y_j(k)$ 选取的预测时域。

使用当前输出实测值 y 和输出预测值 $\hat{y}$, 对未来 p_j 时刻的输出预测值进行反馈修正, 即

$$\hat{y}_{c_j}(k + p_j) = \hat{y}_j(k + p_j) + y_j(k) - \hat{y}_j(k) \tag{3}$$

$$\hat{y}_j(k) = c_j A^{p_j} x(k - p_j) + \sum_{i=1}^{p_j} c_j A^{i-1} B u(k - i) \tag{4}$$

应用单值预测控制算法[4~7], 控制时域 $L = 1$, 即只在 k 时刻改变控制作用的大小, 其后则维持不变, 亦即 $u(k + i) = u(k)\ (i > 0)$, 使反馈修正后的输出预测值等于输出给定值。由式(3) 和(4) 得

$$y_j^s(k + p_j) = c_j A^{p_j} x(k) + y_j(k) - \hat{y}_j(k) + s_j(p_j) u(k) \tag{5}$$

由此得到多变量预测控制系统的最优控制律

$$u(k) = S^{-1}(P)\left[Y^s(k) - y(k) - Kx(k) + \hat{y}(k)\right] \tag{6}$$

其中, $Y^s(k)$ 是输出给定值, $\hat{y}(k)$ 是当前输出的预测值, 而

$$K = CA^P = \begin{bmatrix} c_1 A^{p_1} \\ c_2 A^{p_2} \\ \vdots \\ c_r A^{p_r} \end{bmatrix}, \quad Y^s(k) = \begin{bmatrix} y^{s_1}(k) \\ y^{s_2}(k) \\ \vdots \\ y^{s_r}(k) \end{bmatrix}$$

$$S(P) = \sum_{i=1}^{P} CA^{i-1}B = \begin{bmatrix} s_1(p_1) \\ s_2(p_2) \\ \vdots \\ s_r(p_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{p_1} c_1 A^{i-1} B \\ \sum_{i=1}^{p_2} c_2 A^{i-1} B \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{p_r} c_r A^{i-1} B \end{bmatrix}$$

式中, $P = [p_1\ p_2 \cdots p_r]^{\mathrm{T}}$ 是选定的预测时域。由式(6) 知, 选取 P 的必要条件是使矩阵 $S(P)$ 的逆存在。将不确定性影响表示为如下形式

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k) + \Delta(k) \tag{7}$$

其中 $\Delta(k) = \Delta A x(k) + \Delta B u(k)$。对上式求 z 变换得

$$X(z) = (zI - A)^{-1} BU(z) + \Delta(z) \tag{8}$$

使用实测状态变量 $x(k)$ 和被控变量 $y(k)$ 计算最优控制律。由式(4) 和(6) 得

$$U(z) = S^{-1}(P)\Big\{Y^s(z) - Y(z) - KX(z) \times (1 - z^{-p}) + \sum_{i=1}^{P} S(i) U(z) z^{-i}\Big\} \tag{9}$$

将式(8) 代入(9), 得

$$U(z) = S^{-1}(P)\Big\{Y^s(z) - Y(z) - K(zI - A)^{-1} \times BU(z)(1 - z^{-p}) + K\Delta(z)(1 - z^{-p}) + \sum_{i=1}^{P} S(i) U(z) z^{-i}\Big\} \tag{10}$$

式(10) 表明, 状态反馈预测控制系统除了具有输出反馈外, 由于使用实测状态变量 $x(k)$ 反馈, 增加了参数不确定项的前馈, 即 $K\Delta(z)(1 - z^{-p})$, 因此它在改善控制系统的鲁棒性方面, 比DMC, GPC 和 MC 算法有所提高。

首先按标称系统(A, B, C) 设计预测控制系统, 适当选取预测时域 P, 使所设计的控制系统稳定; 其次考虑系统的不确定性, 此时闭环系统可描述为

$$x(k + 1) = (\bar{A} + \Delta\bar{A}) x(k) \tag{11}$$

$$\begin{cases} \bar{A} = A - BS^{-1}(P)K \\ \Delta\bar{A} = \Delta A - \Delta B S^{-1}(P) K \end{cases} \tag{12}$$

其中, $S^{-1}(P)$ 和 K 由标称系统(A, B, C) 按式(6) 设计, 并使闭环系统 $\bar{A}$ 稳定, $\Delta\bar{A}$ 为系统的不确定项。

关于预测控制系统的鲁棒性稳定问题, 有如下定理:

定理 1　如果选取预测时域 P, 使闭环系统 $\bar{A}$ 稳定, 则参数不确定性预测控制系统

$$x(k + 1) = (\bar{A} + \Delta\bar{A}) x(k) \tag{13}$$

鲁棒性稳定的条件是下列不等式成立

$$\|\Delta\bar{A}\| < -\lambda_M(\bar{A}) + \sqrt{\lambda_M^2(\bar{A}) + \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(H)}} \tag{14}$$

其中, 范数 $\|\Delta\bar{A}\|$ 为已知, H 和 Q 是对称的正定矩阵, 并满足下列Lyapunov 矩阵方程

$$\bar{A}^{\mathrm{T}} H \bar{A} - H = -Q \tag{15}$$

$$\|\bar{A}\| = \lambda_{\max}^{1/2}(\bar{A}^{\mathrm{T}} \bar{A}) = \lambda_M(\bar{A}) \tag{16}$$

$$\|\Delta\bar{A}\| = \lambda_{\max}^{1/2}(\Delta\bar{A}^{\mathrm{T}} \Delta\bar{A}) = \lambda_M(\Delta\bar{A}) \tag{17}$$

$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ 是矩阵"·"最小特征根, $\lambda_{\max}(\cdot)$ 是矩阵"·"最大特征根[11], $\lambda_M(\cdot)$ 是矩阵"·"最大奇异值。

证明

$$x^{\mathrm{T}}[(\bar{A} + \Delta\bar{A})^{\mathrm{T}} H (\bar{A} + \Delta\bar{A}) - H] x \le -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 + 2\lambda_M(\bar{A})\lambda_{\max}(H)\lambda_M(\Delta\bar{A}) \times \|x\|^2 + \lambda_{\max}(H)\lambda_M^2(\Delta\bar{A})\|x\|^2 \tag{18}$$

应用一元二次代数方程求根公式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{19}$$

将 $a = \lambda_{\max}(H)$, $b = 2\lambda_M(A)\lambda_{\max}(H)$, $c = -\lambda_{\min}(Q)$ 代入式(19), 整理得

$$\|\Delta\bar{A}\| < -\lambda_M(\bar{A}) + \sqrt{\lambda_M^2(\bar{A}) + \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(H)}} \tag{20}$$

因为式(20) 成立, 保证式(18) 小于零成立, 所以预测控制系统(13) 具有鲁棒稳定性。(证毕)

如果选取 $Q = I$ 为单位矩阵, 则有

$$\|\Delta\bar{A}\| < -\lambda_M(\bar{A}) + \sqrt{\lambda_M^2(\bar{A}) + \frac{1}{\lambda_{\max}(H)}} \tag{21}$$

状态反馈预测控制系统鲁棒稳定性设计的步骤如下:

1) 适当选取预测时域 P, 按标称系统 (A, B, C) 设计预测控制系统, 按式(6), $\bar{A} = A - BS^{-1}(P)K$ 使 $\bar{A}$ 稳定;

2) 检验是否满足定理1条件, 即当 $\Delta B = 0$ 时, $\Delta\bar{A} = \Delta A$; 当 $\Delta B \neq 0$ 时, $\Delta\bar{A} = \Delta A - \Delta BS^{-1}(P)K$;

3) 若满足定理条件, 则闭环预测控制系统具有鲁棒稳定性; 否则, 调整预测时域 P, 重复上述设计过程。

如果 $\Delta B = 0$, 则 $\Delta\bar{A} = \Delta A$, 此时定理1给出的结果是准确的; 如果 $\Delta B \neq 0$, 可用 $\|\Delta A\| + \beta\|\Delta B\|$ 代替 $\|\Delta\bar{A}\|$ 项, 其中 $\beta > 0$ 可由 $S^{-1}(P)K$ 确定。这时的判断结果是比较保守的。

3 结　论

本文分析了状态反馈预测控制系统的鲁棒稳定性, 给出了鲁棒稳定性的充分条件。基于状态空间模型, 使用实测状态变量反馈, 将参数不确定项引入控制作用中, 增加了状态变量的动态反馈。与DMC, GPC 和 MC 算法相比, 改善了控制系统的鲁棒性, 为状态反馈预测控制系统的分析、设计及实际应用提供了理论依据。

参考文献:

[1] Culter C R, Ramaker B L. Dynamic matrix control——A computer control algorithm [M]. San Francisco: JACC, 1980.
[2] Clarke D W, Mohtadi C, Tuffs P S. Generalized predictive control[J]. Automatica, 1987, 23(2): 137-148.
[3] Clarke D W, Mohtadi C. Properties of generalized predictive control[J]. Automatica, 1989, 25(6): 859-875.
[4] 袁璞, 左信, 郑海涛. 状态反馈预估控制[J]. 自动化学报, 1993, 19(5): 569-577.
[5] 袁璞. 单值预估控制[J]. 石油大学学报(自然科学版), 1992, 16(5): 100-109.
[6] 胡品慧. 多变量状态反馈预测控制及应用[D]. 北京: 石油大学, 1999.
[7] 胡品慧, 袁璞. 状态反馈预测控制系统研究[J]. 石油大学学报(自然科学版), 2000, 24(2): 98-100.
[8] Garcia, C E, Prettt D M, Morari M. Model predictive control: Theory and practice——A survey[J]. Automatica, 1989, 25(3): 335-348.
[9] 袁璞. 生产过程动态数学模型及其在线应用[M]. 北京: 中国石化出版社, 1998.
[10] 舒迪前. 预测控制系统及其应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 1998.

(上接第125页)

4 结　论

本文在混沌优化方法的基础上, 提出利用线性搜索来加快局部解空间的搜索速度, 并结合精确不可微罚函数求解非线性约束优化问题。算法简单实用, 对优化问题无需连续性、可微性的要求, 搜索效率较高, 是解决约束优化问题的一种有效方法。仿真实例表明, 在求解精度、收敛速度、满足约束及可靠性等方面, 该算法均能取得令人满意的结果。

参考文献:

[1] 张春慨, 邵惠鹤. 采用退化混沌突变的实数编码遗传算法及其应用[A]. WCICA'2000[C]. 合肥, 2000. 634-637.
[2] 李兵, 蒋慰孙. 混沌优化方法及其应用[J]. 控制理论与应用, 1997, 14(4): 613-615.
[3] 张彤, 王宏伟, 王子才. 变尺度混沌优化方法及应用[J]. 控制与决策, 1999, 14(3): 285-287.
[4] 袁亚湘, 非线性规划数值方法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1993.
[5] Arun V Holden. Chaos[M]. Manchester University Press, 1986.
[6] Homaifar A, Qi C X, Lai S H. Constrained optimization via genetic algorithms[J]. Simulation, 1994, 62(4): 242-254.
[7] Fogel D B. An introduction to simulated evolutionary optimization[J]. IEEE Trans on Neural Network, 1994, 5(1): 3-14.