第 16 卷 第 1 期 控 制 与 决 策 2001 年 1 月
Vol. 16 No. 1 CONTROL AND DECISION Jan. 2001

文章编号: 1001-0920(2001) 01-0020-05

不确定线性系统鲁棒二次最优控制的时频域方法

薛安克[1], 吕应权[2], 孙优贤[2]
(1. 杭州电子工业学院 自动化系, 浙江 杭州 310012; 2. 浙江大学 工业控制技术研究所, 浙江大学 工业控制技术国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 利用时域和频域结合的方法, 讨论了线性不确定系统鲁棒二次最优控制问题; 提出了线性不确定系统鲁棒二次最优的概念, 并证明了有关性质; 建立了鲁棒回差方程, 阐述了鲁棒二次最优控制系统的分析和综合方法; 最后给出了工程应用设计实例。

关键词: 线性不确定系统; 鲁棒控制; 最优控制
中图分类号: TP 13 文献标识码: A

Robust Quadratic Optimal Control for Uncertain Linear Systems

XUE An-ke[1], LU Ying-quan[2], SUN You-xian[2]
(1. Department of Automation, Hangzhou Institute of Electronics Engineering, Hangzhou 310012, China; 2. Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: The problem of robust quadratic optimal control for uncertain linear systems is discussed by means of analysis algorithms in time and frequence domains. Some definitions of robust quadratic optimality for uncertain linear systems are proposed. A modified robust difference equality is derived. Analysis and synthesis methods of the robust quadratic optimal control for uncertain linear systems are presented. An application example is given to illustrate the utilization of the approach.

Key words: uncertain linear systems; robust control; optimal control

1 引　　言

基于 Lyapunov 理论的不确定系统分析和综合方法, 由于可以方便地处理时变不确定系统的鲁棒性问题, 并最终归结为 Riccati 方程的求解, 因而受到人们的极大关注, 并已取得了相当的研究成果[1～3]。实际控制系统的设计常常不仅要求闭环系统稳定, 而且要求其达到一定的性能指标, 因此对同时鲁棒稳定和鲁棒性能的研究引起人们的广泛兴趣[4]。其中较为有效的是鲁棒线性二次设计(简称 RLQ)方法[5,6]。基于时域的鲁棒 LQ 设计虽能保证不确定闭环系统渐近稳定和某一性能指标最优, 但并不知其鲁棒稳定裕度以及性能的鲁棒性。

现有多种评价系统稳定性能的方法, 但工程实际中最常用的是稳定裕度的概念, 即增益和相位裕度。由于基于时域的鲁棒 LQ 分析和综合方法很难与其建立直接的联系, 因此本文利用时域和频域结合的方法来讨论鲁棒 LQ 问题。时域方法便于鲁棒稳定性的分析, 而频域方法则便于度量稳定裕度。二者的结合, 可较好地解决鲁棒LQ 设计的鲁棒稳定

收稿日期: 1999-12-14; 修回日期: 2000-05-22
基金项目: 国家自然科学基金项目(69874036); 中国博士后科学基金项目; 浙江省自然科学重点基金项目(ZD9905)
作者简介: 薛安克(1957—), 男, 山东莒南人, 教授, 博士, 从事鲁棒和最优控制、智能控制理论和应用研究; 孙优贤(1940—), 男, 浙江诸暨人, 中国工程院院士, 教授, 博士生导师, 从事过程控制、鲁棒控制等研究。

和鲁棒性能问题。

2 问题提出和定义

考虑线性连续不确定系统

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A)x(t) + Bu(t)$$
$$x(0) = x_0 \tag{1}$$

其中, $x(t) \in R^n$ 为状态, $u(t) \in R^m$ 为控制输入, $A_0 \in R^{n\times n}$ 和 $B \in R^{n\times m}$ 是已知常阵, ΔA 是具有适当维数的不确定时变实矩阵, 假设具有如下形式

$$\Delta A(t) = DF(t)E \tag{2}$$

这里, $D \in R^{n\times r}$ 和 $E \in R^{q\times n}$ 是已知定常阵, $F(t) \in R^{r\times q}$ 为不确定函数阵, 并假设 $F(t)$ 属于如下定义的集合 Ω。

$$\Omega = \{F(t) \mid F^T(t)F(t) \le I, \forall t\}$$

对应系统(1) 的性能泛函为

$$J = \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))\,dt \tag{3}$$

其中 $R > 0, Q > 0$。

当系统(1) 中 $\Delta A = 0$ 时, 式(1) 所对应的标称系统 $\Sigma(A_0, B)$ 和性能泛函(3) 构成规范的LQ 调节器(简称 LQR) 问题。对此存在最优控制

$$u(t) = Kx(t) = -R^{-1}B^TPx(t) \tag{4}$$

使闭环系统 $\dot{x}(t) = (A_0 + BK)x(t)$ 渐近稳定, 且具有$(1/2, \infty)$ 的增益裕量和 60°的相位裕量, 同时使式(3) $\min(J) = x_0^TPx_0$, 其中 $P = P^T > 0$ 满足 Riccati 方程

$$PA_0 + A_0^TP + Q - PBR^{-1}B^TP = 0 \tag{5}$$

当 $\Delta A \ne 0$ 时, 以上性能将不再保证。现有的许多鲁棒稳定分析方法仅给出式(1) 的鲁棒稳定界, 并不清楚其稳定裕量, 更不知所设计的闭环系统是否具有类似规范 LQ 调节器的最优性能。

借鉴规范 LQ 调节器问题的时域分析和频域性能描述, 本文采用时域和频域相结合的方法分析和综合不确定系统的鲁棒二次最优控制问题。

定义 1　对不确定系统(1) 和性能泛函(3), 考虑状态反馈

$$u(t) = Kx(t) \tag{6}$$

对应的不确定闭环系统为

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A + BK)x(t) \tag{7}$$

如果存在一个正定对称矩阵 $P > 0$, 使得

$$[A_K + \Delta A]^TP + P(A_K + \Delta A) + K^TBK < 0 \tag{8}$$

对任意允许的不确定性 ΔA 都成立, 则称不确定系统(1) 在反馈(6) 下的闭环系统(7) 是鲁棒二次最优的, 式(6) 为对应不确定系统(1) 和性能泛函(3) 的鲁棒二次最优控制律, 式(8) 中 $A_K = A_0 + BK$。

定义 2　对于不确定闭环系统(7), 若存在某一常数 $\alpha > 0$ 和 Lyapunov 函数 $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, 使得

$$\dot{V}(x(t)) \le -\alpha\|x(t)\|^2, \quad \forall t \tag{9}$$

对任意闭环系统的解 $x(t)$ 都成立, 则称该闭环系统是以收敛率 α 指数渐近稳定的。

3 鲁棒回差方程

对规范 LQ 调节器问题, 时域可通过 Riccati 方程(5) 求解, 频域则可通过频域公式设计。利用最优调节器的回差等式, 可以进行闭环系统的设计和最优性能分析。针对不确定系统的鲁棒 LQ 最优控制问题, 本节给出其相应的鲁棒回差等式。

定理 1　如果存在正定对称矩阵 $P > 0$, 满足不确定系统(1) 和性能泛涵(3) 所对应的规范 LQ 问题, 则有

$$[I - K\Phi(-s)B]^TR[I - K\Phi(s)B] = R + B^T\Phi^T(-s)(-PA - A^TP + PBR^{-1}B^TP)\Phi(s)B \tag{10}$$

其中, $A = A_0 + \Delta A$, $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$, $K = -R^{-1}B^TP$。

证明　令 $A = A_0 + \Delta A$, 式(5) 两端同时加上和减去 $PA + A^TP$ 和 sP, 整理可得

$$P(sI - A) - (sI + A^T)P + P(A - A_0) + (A^T - A_0^T)P - Q + PBR^{-1}B^TP = 0 \tag{11}$$

用 $B^T(-sI - A^T)^{-1}$ 和$(sI - A)^{-1}B$ 分别左乘以和右乘以式(11), 并对所得结果稍加整理, 则有

$$B^T\Phi^T(-s)PB + B^TP\Phi(s)B + B^T\Phi^T(-s)PBR^{-1}B^TP\Phi(s)B = B^T\Phi^T(-s)[P(A_0 - A) + (A_0^T - A^T)P + Q]\Phi(s)B \tag{12}$$

然后对上式两边同乘以 R^{-1} 并加上 I 阵, 再做简单的矩阵代数运算, 即可得到式(11) 。(证毕)

式(10) 称为不确定线性系统(1) 鲁棒 LQ 最优控制问题的鲁棒回差方程, 它建立了鲁棒 Riccati 方程和频域传递函数(阵) 之间的关系。记 $G_R(s) = R^{1/2}K\Phi(s)BR^{-1/2}$, 如果

$$PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP < 0 \tag{13}$$

利用鲁棒回差方程(10), 此时有 $\sigma_i[I + G_R(s)] \ge 1$, 即 $\sigma_i[I + G_R(s)]^{-1} \le 1$。若能保证不确定系统(1) 对

应的灵敏度函数奇异值小于 1, 则不确定系统(1) 类似规范LQ调节器的性能可得到保证[7], 即具有无穷增益裕度和60°相位裕度。另一方面, 当取 $u(t)=Kx(t)=-R^{-1}B^{T}Px(t)$ 时, 则式(13) 等价于 $(A_K+\Delta A)^{T}P+P(A_K+\Delta A)+K^{T}RK<0$。由定义1知, 对应的不确定闭环系统(7) 是鲁棒二次最优的, 因此, 由定理1可得以下推论:

推论1　假设存在正定对称矩阵 $P>0$, 使系统(1) 对所容许的任意不确定性 ΔA 都满足式(13), 则不确定系统(1) 在状态反馈 $u(t)=-R^{-1}B^{T}Px(t)$ 下的闭环系统(7) 是鲁棒二次最优的。

4　基本定理

4.1　充分必要条件

为证明鲁棒二次最优的充分必要条件, 首先介绍两个基本引理:

引理1[8]　对任意给定的适当维数向量 $x\in R^{n}$, 有

$$\max\{[x^{T}PDFEx]^{2}:F^{T}(t)F(t)\le I\}=x^{T}PDD^{T}Pxx^{T}E^{T}Ex \tag{14}$$

引理2[1]　假设 X,Y,Z 为给定的 n 阶方阵, 且 $X\ge 0, Y<0, Z\ge 0$。若对任意非零向量 $\xi\in R^{n}$, 有

$$(\xi^{T}Y\xi)^{2}>4\xi^{T}X\xi\xi^{T}Z\xi \tag{15}$$

则存在标量 $\lambda>0$, 使得

$$\lambda^{2}X+\lambda Y+Z<0 \tag{16}$$

定理2　对于给定的不确定线性系统(1), 存在线性状态反馈控制器(6), 使得不确定闭环系统(7) 鲁棒二次最优的充分必要条件是存在适当正数 $\epsilon>0$, 使得 Riccati 不等式

$$A_0^{T}P+PA_0-PBR^{-1}B^{T}P+\epsilon PDD^{T}P+(1/\epsilon)E^{T}E<0 \tag{17}$$

具有正定解 $P>0$。如果上式有解 $P>0$, 则使不确定闭环系统(7) 鲁棒二次最优的控制器为

$$K=-R^{-1}B^{T}P \tag{18}$$

证明　1) 充分性: 若式(17) 有正定解 $P>0$, 注意到对任意正数 $\epsilon>0$, 有

$$\Delta A^{T}P+P\Delta A=[DF(t)E]^{T}P+PDF(t)E\le \epsilon PDD^{T}P+(1/\epsilon)E^{T}E \tag{19}$$

从而

$$(A_K+\Delta A)^{T}P+P(A_K+\Delta A)+K^{T}RK\le A_K^{T}P+PA_K+\epsilon PDD^{T}P+(1/\epsilon)E^{T}E+K^{T}RK \tag{20}$$

将式(18) 代入上式, 由定理条件, 再根据定义1即可证得充分性。

2) 必要性: 假设 $P>0$ 满足式(8), 由定义1可得

$$A_K^{T}P+PA_K+K^{T}RK<-\Delta A^{T}P-P\Delta A=-[DFE]^{T}P-PDFE \tag{21}$$

令 $Z=A_K^{T}P+PA_K+K^{T}RK$, 由式(21) 知, 对任意非零向量 $x(t)\in R^{n}$ 和任意 $F(t)$, 有 $x^{T}Zx<-2x^{T}PDFEx$, 从而

$$x^{T}zx<-2\max\{x^{T}PDFEx:F^{T}(t)F(t)\le I\}\le 0 \tag{22}$$

因此

$$(x^{T}Zx)^{2}>4\max\{[x^{T}PDFEx]^{2}:F^{T}(t)F(t)\le I\}=4x^{T}PDD^{T}Pxx^{T}E^{T}Ex \tag{23}$$

以上等式的成立来自引理1。再利用引理2可知存在标量 $\epsilon>0$, 使得

$$\epsilon^{2}PDD^{T}P+\epsilon Z+E^{T}E<0 \tag{24}$$

将 A_K 代入上式, 经整理可得

$$A_0^{T}P+PA_0-PBR^{-1}B^{T}P+\epsilon PDD^{T}P+(1/\epsilon)E^{T}E<-[K+R^{-1}B^{T}P]^{T}R(K+R^{-1}B^{T}P)\le 0 \tag{25}$$

必要性得证。

4.2　性能分析

本节讨论由定理2构造的鲁棒二次最优闭环系统的性质。

性质1　对应系统(1) 的鲁棒二次最优闭环系统(7) 是 α 指数渐近稳定的。

证明　取Lyapunov函数 $V(x(t))=x^{T}(t)Px(t)$, 对时间的导数为

$$\mathring{V}(x(t))=x^{T}[(A_0+\Delta A)^{T}P+P(A_0+\Delta A)]x+u^{T}B^{T}Px+x^{T}PBu \tag{26}$$

代入 $u=Kx=-R^{-1}B^{T}Px$, 得

$$\mathring{V}(x(t))=x^{T}[[A_K+\Delta A]^{T}P+P(A_K+\Delta A)]x \tag{27}$$

由定义1知

$$\mathring{V}(x(t))<-x^{T}K^{T}RKx\le -\lambda_{\min}(K^{T}RK)\|x\|^{2}=-\alpha\|x\|^{2} \tag{28}$$

因此, 对应系统(1) 的闭环系统(7) 是 α 指数渐近稳定的。

性质2　鲁棒二次最优闭环系统具有(1/2, ∞) 的增益裕量和60°的相位裕量。

该性质已在第3节证明。

性质3　鲁棒二次最优闭环系统是LQ意义下

最优的。

为证明性质 3, 首先给出一个引理。

引理**3**　存在正定矩阵 $P > 0$, 使得式(17) 成立的一个充分条件是存在正定矩阵 $Q > 0$, 使得以下 Riccati 方程具有正定解 $\tilde{P} > 0$。

$$A_0^{\mathrm{T}}\tilde{P} + \tilde{P}A_0 - \tilde{P}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\tilde{P} + \epsilon\tilde{P}DD^{\mathrm{T}}\tilde{P} + (1/\epsilon)E^{\mathrm{T}}E + Q = 0 \qquad (29)$$

该引理的证明是显然的。下面给出性质 3 的证明。

证明　如果 $\tilde{P} > 0$ 是式(29) 的一个正定解, 则可选择如下的性能泛函加权阵

$$\tilde{Q} = Q + \epsilon\tilde{P}DD^{\mathrm{T}}\tilde{P} + (1/\epsilon)E^{\mathrm{T}}E \qquad (30)$$

由式(29) 知, 鲁棒二次最优控制系统设计问题可转变为使如下性能泛函极小的规范 LQ 设计问题。

$$\mathcal{J} = \int_0^{\infty}(x^{\mathrm{T}}(t)\tilde{Q}x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t))\,\mathrm{d}t \qquad (31)$$

因此, 存在最优控制 $u(t) = \tilde{K}x(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\tilde{P}x(t)$, 使闭环系统 $\dot{x}(t) = (A_0 + B\tilde{K})x(t)$ 渐近稳定, 且具有$(1/2, \infty)$ 增益裕量和 60°相位裕量。对应的性能指标最优值为 $\min(\mathcal{J}) = x_0^{\mathrm{T}}\tilde{P}x_0$, 其中 $\tilde{P} = \tilde{P}^{\mathrm{T}} > 0$ 满足 Riccati 方程

$$A_0^{\mathrm{T}}\tilde{P} + \tilde{P}A_0 - \tilde{P}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\tilde{P} + \tilde{Q} = 0 \qquad (32)$$

由此可知性质 3 成立。(证毕)

5　实例分析

现将鲁棒二次最优控制方法应用于造纸机网前箱的控制系统设计, 以此说明该方法的有效性。网前箱的参数不确定数学模型可用状态方程表示为[9]

$$\begin{bmatrix} \dot{H} \\ \dot{p} \\ \dot{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.021 + k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -6.67 + 4k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.94 + 2k_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} H \\ P \\ T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.83 & -0.42 & -0.22 \\ -6.53 & -3.86 & 7.33 \\ 2.47 & -0.63 & 0.09 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_c \\ u_H \\ u_a \end{bmatrix}$$

其中, H、P 和 T 分别为网前箱液位、上部压力和出口纸浆温度; u_c, u_H 和 u_a 分别为冷水调节阀、热水调节阀和空气调节阀的操作电流; 不确定参数满足 $|k_i| \le 1, i = 1, 2, 3$。将不确定 ΔA 表示成式(2) 的形式, 其中 $D = \mathrm{diag}(1 \quad 4 \quad 2)$, $E = I_3$, $F(t) = \mathrm{diag}(k_1 \quad k_2 \quad k_3)$。取性能泛函(3) 中加权矩阵 $Q = I_3$, $R = I_3$。对标称系统($\Delta A = 0$) 按规范 LQ 调节器设计, 可得二次最优反馈控制律

$$K_o = \begin{bmatrix} -0.5990 & -0.3046 & 0.5574 \\ -0.6228 & -0.2035 & -0.3115 \\ -0.4409 & 0.3953 & 0.0666 \end{bmatrix}$$

此时, 当存在不确定性 $F(t) = I_3$ 时, 闭环系统将不稳定, 其特征值为 0.509 4, − 8.591 1 和 − 0.655 9。采用鲁棒二次最优控制, 用 MATLAB 的 LMI 工具箱计算, 可得到对应的控制器为

$$K_r = \begin{bmatrix} -3.2463 & -1.3775 & 1.7745 \\ -6.8699 & -0.9276 & -2.5088 \\ -4.8420 & 1.9970 & -0.1339 \end{bmatrix}$$

设初始状态

$$\begin{bmatrix} H_0 \\ P_0 \\ T_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

此时闭环系统的状态响应如图 1 所示。由图可见, 闭环系统的响应性能较好。由此看出, 应用鲁棒二次最优控制不仅可保证不确定闭环系统的鲁棒稳定性, 而且可保证闭环系统的鲁棒性能。实际上此时系统是 LQ 意义下鲁棒最优的, 对应的闭环系统二次性能泛函为 $\mathcal{J} = 21.843$。

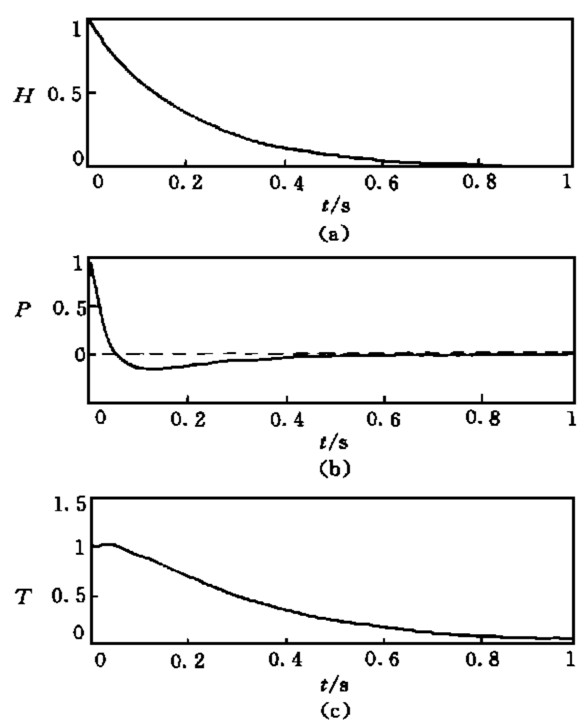

图 **1**　闭环系统状态响应

(a)　H 的状态响应　　(b)　P 的状态响应

(c)　T 的状态响应

6 结 语

本文给出的不确定线性系统鲁棒二次最优控制系统分析和综合方法, 较好地解决了不确定系统同时鲁棒稳定和鲁棒性能问题。采用时域和频域结合的方法, 使理论分析的严谨性和工程应用的便利性得到有机的统一。在鲁棒稳定性分析中考虑其稳定裕度, 使所得的结果更具有实际应用的可能性。给出的应用实例很好地证实了这一点。

参考文献:

[1] Petersen I R, Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems[J]. Automatica, 1986, 22(4): 397-411.
[2] Bernstein D S, Haddad W M. Robustness stability and performance analysis for state space systems via quadratic Lyapunov bounds[J]. SIAM J Matrid Anal Appl, 1990, 11(2): 239-271.
[3] 黄琳, 秦化淑, 郑应平, 等. 复杂控制系统理论: 构想与前景[J]. 自动化学报, 1993, 19(2): 129-137.
[4] Kemin Zhou, Khargonekar P P, Stoustrup *et al*. Robust performance of systems with structured uncertainties in state space[J]. Automatica, 1995, 31(2): 249-255.
[5] Mehdi D, Hamid A M, Perrin F. Robustness and optimality of linear quadratic controller for uncertain systems[J]. Automatica, 1996, 32(7): 1081-1083.
[6] Kosmidou O I. Robust stability and performance of systems with structured and bounded uncertainties: An extension of the guaranteed cost control approach[J]. Int J Contr, 1990, 52(3): 627-640.
[7] Lehtomaki N A, Sandell Jr N R, Athans M. Robustness results in linear Gaussian based multivariable control designs[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1981, 26(1): 75-92.
[8] Petersen I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems[J]. Sys & Contr Let, 1987, 8: 351-357.
[9] 孙优贤. 造纸过程建模与控制[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1993.

(上接第 19 页)

5 结 语

本文基于生物 DNA 机理, 提出一种基于 DNA 编码方法进行问题求解的 DNA 遗传算法, 给出了 DNA 遗传算法的结构, 讨论了遗传操作算子, 并将其用于 TS 模糊控制系统的优化设计。

DNA 遗传算法是常规遗传算法的发展, 它除包含常规遗传算法所固有的优点外, 还有以下特点:

1) DNA 编码方法具有知识表达方式的灵活性、编码的丰富和重叠性、染色体长度的可变性, 它较二进制编码更适合于复杂知识的表达, 且码长大为缩短;

2) DNA 遗传算法中可引入基因级操作, 从而极大地丰富了进化手段;

3) DNA 遗传算法由于其生物机理上固有的并行性, 使其收敛速率大大提高。

DNA 计算与软计算集成是当前智能控制中一个新的研究方向。DNA 遗传算法在许多实际问题中将得到越来越多的应用, 故应进一步发展其它基于 DNA 机理的智能学习方法。

参考文献:

[1] Adleman L M. Molecular computation of solutions to combinatorial problems[J]. Science, 1994, 266(5187): 1021-1023.
[2] Lipton R J. DNA solution of hard computational problems[J]. Science, 1995, 268(5210): 542-545.
[3] 任立红, 丁永生, 邵世煌. DNA 计算研究的现状与展望[J]. 信息与控制, 1999, 28(4): 241-248.
[4] Ren Li-Hong, Ding Yong-Sheng, Shao Shi-Huang. DNA bio-soft computing and its application to intelligent control systems[J]. Shanghai Jiaotong University (English Version), 1999, E-4(2): 97-103.
[5] D P Filev, R R Yager. A generalized defuzzification method via BAD distributions[J]. Int J of Intelligent Systems, 1991, 6(9): 687-697.
[6] 丁永生. 模糊系统的解析分析和设计及其在激光热疗法中的应用(英文)[D]. 上海: 东华大学, 1998.