文章编号: 1001-0920(2001)01-0029-04

# 扩展时间事件图的能达性与能控序列

陈文德, 卓之兵
(中国科学院 系统科学研究所, 北京 100080)

摘 要: 利用图论方法在双子结构中研究扩展时间事件图的某些问题, 获得了能达性的一个充分必要条件和基于能达性的标准结构。在此基础上, 把监控理论中的能控序列的分量分为本质不同的 3 类, 进而得到能控序列的简化求解方法。

关键词: 离散事件动态系统(DEDS); 监控; 扩展时间事件图(ETEG); 能达性; 能控序列
中图分类号: O 231 文献标识码: A

# Reachability and Controllable Sequences of ETEG

CHEN Wen-de, ZHUO Zhi-bing
(Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract**: Some problems on ETEG are studied by using graph methods in the dioid framework. A necessary and sufficient condition for reachability of ETEG and ETEG's reachability standard structure are obtained. Components of the controllable sequences in the supervisory control are classified into three classes.

**Key words**: discrete event dynamic systems (DEDS); supervisory control; extended timed event graph (ETEG), reachability; controllable sequences

## 1 引 言

一类事件图的动态行为能用极大代数方法线性地描述出来[1~4]。文献[1]用图论方法研究了时间事件图(TEG)的能达性和标准结构; [2]用双子模型系统研究了 TEG 的监控理论; [5]进一步研究了强能控性和能控序列, 从而使能控序列及能控序列集在 TEG 的监控理论中发挥重要作用; [6]把上述理论拓展到更广的扩展时间事件图(ETEG)上, 研究的是变迁延时型的 ETEG; [7]则把上述结果推广到位置延时型的 ETEG 上, 从理论上对[6]的某个环节做了严密化处理。

本文针对文献[7]中更广的位置延时型 ETEG 的双子模型, 运用图论方法得到了能达性的充要条件和基于能达性的标准结构。在此基础上, 把监控理论中能控序列的分量分为本质不同的 3 类, 进而得到能控序列的简化求解方法。

## 2 ETEG 的双子模型

ETEG 是一个 6 元集, 记为

$$\text{ETEG} = (P, T, R_1, W, \text{Tempo}, M_0)$$

收稿日期: 1999-11-30; 修回日期: 2000-05-26
基金项目: 国家自然科学基金项目(69874040); 国家攀登计划项目
作者简介: 陈文德(1941—), 男, 江苏苏州人, 研究员, 博士生导师, 从事离散事件动态系统、代数控制理论等研究; 卓之兵(1972—), 男, 安徽泗县人, 博士生, 从事离散事件动态系统、控制理论及其应用的研究。

其中,$P$ 是位置集;$T$ 是跃迁集;$R_1 = R_{PT} \cup R_{TP}$, $R_{PT} = \{\langle p, t\rangle \mid p \in P, t \in T\} \subseteq P \times T$, $R_{TP} = \{\langle t, p\rangle \mid t \in T, p \in P\} \subseteq T \times P$, $P \cap T = \varnothing$;$W$ 是 $R_1$ 中元素重复次数集;Tempo 是一个延时函数;$M_0$ 是初始标志集。用"$\hookrightarrow$"表示位置的输入、输出,延时在 $P$ 上。

下面引入文献[6,7]中的一个定义。令 $w = -\infty$, $w = +\infty$, $\bar{R} = R \cup \epsilon \cup w$,其中 $R$ 是实数集。设 $N$ 是正整数集。

定义1[6,7] 如果 $\langle s\rangle = \langle s_0, s_1, \cdots, s_k, \cdots\rangle$, $\forall k \in N \cup \{0\}$, $s_k \leq s_{k+1}$, $s_k \in \bar{R}$,则 $\langle s\rangle$ 称为时间序列。

设 $\langle s\rangle$ 的全体为 $S$,位置序列 $\langle p\rangle_i = \langle sp_0, \cdots, sp_k, \cdots\rangle_i \in S$ 表示位置 $p_i$ 的时间序列,其中 $sp_k$ 表示第 $k$ 个标志到达的时刻;变迁序列 $\langle t\rangle_i = \langle st_0, st_1, \cdots, st_k, \cdots\rangle_i \in S$ 表示变迁 $t_i$ 的时间序列,其中 $st_k$ 表示第 $k$ 次开始激发的时刻。

定义 $S$ 上的函数如下[6]:

1) $[z^{-k}]$ 是右移函数,如果 $[z^{-k}] \circ \langle s\rangle = \langle \epsilon, \cdots, \epsilon, s_0, s_1, \cdots\rangle$, $k \in N \cup \{0\}$,共有 $k$ 个 $\epsilon$;

2) $[z^{k}]$ 是左移函数,如果 $[z^{k}] \circ \langle s\rangle = \langle s_{k-1}, s_k, \cdots\rangle$, $k \in N \cup \{0\}$;

3) $[\nabla^{k}]$ 是复制函数,如果 $[\nabla^{k}] \circ \langle s\rangle = \langle s_0, \cdots, s_0, s_1 \cdots s_1, \cdots\rangle$, $k \in N$,每个复制 $k$ 个;

4) $[r]$ 是加函数,如果 $[r] \circ \langle s\rangle = \langle s_0 + r, s_1 + r, \cdots\rangle$, $r \in \bar{R}$;

5) $[\Delta^{k}]$ 是抽样函数,如果 $[\Delta^{k}] \circ \langle s\rangle = \langle s_{k-1}, s_{2k-1}, \cdots\rangle$, $k \in N$,每 $k$ 个抽取最后一个并组成一个新序列。

令
$$F_1 = \{[r] \mid r \in \bar{R}\}$$
$$F_2 = \{[z^{k}] \mid k \in N \cup \{0\}\}$$
$$F_3 = \{[z^{-k}] \mid k \in N \cup \{0\}\}$$
$$F_4 = \{[\nabla^{k}] \mid k \in N\}$$
$$F_5 = \{[\Delta^{k}] \mid k \in N\}$$

记
$$\bar{F} = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_5$$
$$F = \{\textstyle\sum_{\oplus} \bar{f}_i \mid \bar{f}_i = f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_j,\ f_i \in \bar{F},\quad i, j \in N\}$$

即 $f_i$ 是 $\bar{F}$ 中的一个算子,$\bar{f}_i$ 是由 $\bar{F}$ 中的算子通过"$\otimes$"运算构成的算子。

文献[7]证明了 $F$ 是一个双子,其中 $\forall \langle s\rangle, \langle t\rangle \in S$, $\langle s\rangle \oplus \langle t\rangle := \langle s_0 \oplus t_0, s_1 \oplus t_1, \cdots\rangle$;$\forall f_1, f_2 \in F$, $(f_1 \otimes f_2) \langle s\rangle := f_1(f_2 \circ \langle s\rangle)$, $(f_1 \oplus f_2) \circ \langle s\rangle := f_1 \circ \langle s\rangle \oplus f_2 \circ \langle s\rangle$。

文献[7]建立了 ETEG 上的双子模型
$$x = Ax \oplus v \oplus \bar{o}$$
其中 $A$ 中元素为
$$[\Delta^{r_{ji}}] \otimes [d_{ji}] \otimes [z^{-m_{ji}}] \otimes [\nabla^{u_{ji}}] \tag{1}$$
此外,[7]中还给出了具有控制序列 $u$ 的双子模型
$$x = Ax \oplus v \oplus u = Ax \oplus I_c y \oplus v \tag{2}$$
其中
$$(I_c)_{ij} = \begin{cases} [0], & i = j, t_i \in T_c \\ [\epsilon], & \text{其 它} \end{cases}$$
[0]和[$\epsilon$]分别是 $\langle F, \otimes\rangle$ 中的零元和单位元,$T_c \subseteq T$ 是控制跃迁集,$t_i \in T_c$ 是控制跃迁。

## 3 能达性与标准结构

文献[1]论述了图论方法在 TEG 中的应用,本文进一步把图论方法用于 ETEG 中。首先给出如下定义:

定义2 对式(1)中的任意一个 $A \in F^{n \times n}$,都存在一个赋权有向图 $G(A)$ 与之对应,$A$ 的 $n$ 个行位置(或列位置)在 $G(A)$ 中有 $n$ 个点与之对应。当阵 $A$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元素 $(A)_{ij} \neq [\epsilon]$ 时,从点 $j$ 到点 $i$ 存在一条弧 $ji$,其权为 $(A)_{ij}$;当 $(A)_{ij} = [\epsilon]$ 时,从点 $j$ 到点 $i$ 不存在弧。图 $G(A)$ 称为阵 $A$ 的关联图。

与 TEG 不同,这里弧的权为算子,本身无法比较轻重,$(A^{k})_{ij}$ 只能对从 $j$ 到 $i$ 长为 $k$ 的所有路的权求和($\sum_{\oplus}$),而不是最重路。从 $i_0$ 到 $i_k$ 的路 $i_0 i_1 \cdots i_k$ 的权 $W(i_0 i_1 \cdots i_k)$ 定义为弧的权的复合算子,即
$$W(i_0 i_1 \cdots i_k) = W(i_{k-1} i_k) \otimes W(i_{k-2} i_{k-1}) \otimes \cdots \otimes W(i_1 i_2) \otimes W(i_0 i_1)$$
用上述方法可计算出 $A^{*}$,即 $(A^{*})_{ij}$ 等于从 $j$ 到 $i$ 的所有路的权求和。

这种图论算法比文献[6]介绍的自动机方法略简,但所得结果一致。

尽管本文中 $A$ 的元素无轻重之分,但根据 $A$ 中元素 $\neq [\epsilon]$ 或 $= [\epsilon]$,仍可揭示出 $G(A)$ 中点与点是否有弧连接,即 ETEG 的变迁之间是否有一个位置连通。因而 ETEG 中与结构连通有关的本质特征可用图 $G(A)$ 为工具加以研究。下面推广文献[1]中的某些概念。

定义3 若有向图中任意两点 $i$ 与 $j$,从 $i$ 到 $j$ 及从 $j$ 到 $i$ 都有路,则称为强连通的;$G(A)$ 可有 $W$ 个强连通支 $G_1, G_2, \cdots, G_W$,其中每个 $G_i$ 为 $G(A)$ 的强连通子图。把每个 $G_0$ 凝成一个点 $i$,若 $G_i$ 到 $G_j$ 有路,则认为从凝点 $i$ 到凝点 $j$ 有一条弧 $ij$,所有凝点及凝

点之间的弧构成的简化图称为 $G(A)$ 的凝图, 记为 $G^*(A)$。若 $G(A)$ 强连通, 则称 $A$ 为不可约的; 否则, 称 $A$ 为可约的。

引理 **1**[1]　设 $A \in F^{n\times n}$, $G(A)$ 含 $W$ 个强连通支, 则存在极大代数上的置换阵 $Q$( 置换阵的定义同线性代数, 但单位元为[0], 零元为[$\epsilon$]), 使得 $A$ 经 $Q$ 的坐标变换后有如下标准形

$$QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & \phi & \cdots & \phi \\ A_{21} & A_2 & \cdots & \phi \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{W1} & A_{W2} & \cdots & A_W \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中, $A_1, A_2, \cdots, A_W$ 均不可约, 它们对应于 $G(A)$ 的 $W$ 个强连通支, $\phi$是每个元素均为[$\epsilon$] 的阵。

称标准形(3) 对应的 $G^*(QAQ^{-1})$ 中凝点 $X_1, X_2, \cdots, X_W$ 的下标编号次序为标准序($A_i$ 与 $X_i$ 对应)。上述 $X_i$ 从左向右排序后, 标准序等价于 $X_i$ 间无指向左方的弧。

能达性是 Petri 网中的一个重要概念。Cohen[8] 对 TEG 引入了能控性的概念, 它与 Petri 网的能达性相同, 因而文献[1] 中也称它为能达性。对于本文研究的 ETEG, 考虑带控制输入 $u$ 的模型(2), 也可引入能达性的概念。

定义 **4**　系统(2) 对应的 ETEG 中, 能与某输入分量 $y_{r_i}$ 连通的状态分量( 即中间变迁) $x_i$ 称为能达的; 否则, 称为不能达的。当且仅当全部 $n$ 个分量 $x_i(1 \le i \le n)$ 均能达时, 称系统(2) 能达。

注 **1**　系统(2) 中的阵 $I_c$, 实质上与 TEG 中的阵 $B$ 作用类似。

定义 **5**　在系统(2) 阵 $A$ 对应的凝图上, 添加一个 $y$ 对应的点, 记为 $u$; 从点 $u$ 向阵 $I_c$ 所有对角线元素为 0 的行位置对应的点所在的凝点做弧, 这样的图称为系统(2) 的强凝图。

定理 **1**　1) 在系统(2) 的强凝网中, 从 $u$ 出发, 有路能达到的所有凝点对应的状态分量集合是系统(2) 的全部能达状态分量。

2) 系统(2) 能达的充要条件是在(2) 的强凝网中, 从点 $u$ 到 $G^*(A)$ 的无进弧的凝点都有弧。

证明略。

下面求解基于能达性的标准结构。

定理 **2**　系统(2) 的阵 $A$ 与阵 $I_c$ 经置换阵 $Q$ 的坐标变换后, 具有以下标准结构

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \phi \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{I}_c = \begin{bmatrix} \phi & \phi \\ \phi & I_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

其中, $A_{11}$ 和 $A_{22}$ 为引理 1 形式的标准形, $I_2$ 的对角线上元素包含了 $I_c$ 中所有[0] 元素, 其它元素均为[$\epsilon$], $\hat{A}$ 与 $\hat{I}_c$ 的分块相同, 方阵 $A_{22}$ 对应的状态分量为全部能达分量。

证明略。

能达性及其标准结构是 ETEG 中的基本概念, 它有许多用处, 下节将应用它来得到能控序列的简化求解法。

## 4　能控序列

能控序列是近几年研究 TEG 的监控时提出的一个重要概念。系统(2) 的能控序列 $y$ 为以下方程的解, 即

$$A^*(I_c y \oplus v) = y \tag{5}$$

由双子代数方程的解法[2], 式(5) 即为

$$A^* I_c y \oplus A^* v = y$$

因此得最小解

$$y = (A^* I_c)^* A^* v \tag{6}$$

下面应用第 3 节的方法与结果, 把 $y$ 的分量分为 3 类, 揭示出这 3 类分量本质上不同的特点, 并使求解 $y$ 的方法简化。

不失一般性, 可设系统(2) 的 $A$, $I_c$ 已化为系统(4) 的标准形, 并设经坐标变换后 $I_c$ 中的 0 元素已集中在阵 $\hat{I}_c$ 对角线的右下方, 即

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \phi & \phi \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\hat{I}_c = \begin{bmatrix} \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & I \end{bmatrix} \tag{7}$$

其中, $I$ 为 $N$ 阶单位阵, $\hat{A}$ 和 $\hat{I}_c$ 的分块相同, $A_{11}$ 和 $A_{22}$ 为方阵, $A_{11}$ 对应于不能达分量。坐标变换对于向量 $y$, $v$ 仅是改变了各分量的排列次序, 记坐标变换后的向量为 $\hat{y}$, $\hat{v}$, 于是式(5) 变为

$$\hat{A}^*(\hat{I}_c \hat{y} \oplus \hat{v}) = \hat{y} \tag{8a}$$

其中, $\hat{y} = [y_1, y_2, y_3]^{\mathrm{T}}$, $\hat{v} = [v_1, v_2, v_3]^{\mathrm{T}}$, 向量的分块与阵 $\hat{A}$ 一致。由分块阵的乘法法则和 $\hat{A}^*$ 的定义, 易知 $\hat{A}^*$ 仍在 $\hat{A}$ 的 $\phi$块处保持为 $\phi$块, 即 $\hat{A}^*$ 有以下形式

$$\hat{A}^* = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \phi & \phi \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix} \tag{8b}$$

其中$\tilde{A}_{ij}$ 可根据第3节求$A^*$ 的图论算法得到。于是式(8a) 变为

$$\begin{bmatrix}\tilde{A}_{11} & \phi & \phi \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi \\ \phi \\ y_3\end{bmatrix} \oplus$$

$$\hat{A}^*\begin{bmatrix}v_1 \\ v_2 \\ v_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_1 \\ y_2 \\ y_3\end{bmatrix} \tag{9}$$

由上式可知: $y$ 的3类分量$y_1, y_2, y_3$ 可由以下3种不同途径求得。首先求解$y_3$, 由式(9) 得

$$\tilde{A}_{33}y_3 \oplus [\tilde{A}_{31} \quad \tilde{A}_{32} \quad \tilde{A}_{33}]\hat{v} = y_3 \tag{10}$$

所以最小解

$$y_3 = \tilde{A}_{33}^*[\tilde{A}_{31} \quad \tilde{A}_{32} \quad \tilde{A}_{33}]\hat{v} \tag{11}$$

由于受控变迁的数目$N$ 一般要比全部变迁的数目$n$ 小得多, 因而求解式(11) 要比求解式(6) 简单。

求得$y_3$ 后, 再应用式(9), 可得$y_2$, 即

$$y_2 = \tilde{A}_{23}y_3 \oplus [\tilde{A}_{21} \quad \tilde{A}_{22} \quad \tilde{A}_{23}]\hat{v} \tag{12}$$

至于$y_1$, 由式(9) 可知

$$y_1 = \tilde{A}_{11}v_1 \tag{13}$$

即对应于不能达分量部分的$y_1$, 与$y_2, y_3$ 无关。$y_2, y_1$ 的计算不必解方程, 一般比求解式(6) 简单。

综上所述, 我们证明了以下定理:

**定理3** 系统(2) 的最小能控序列, 即方程(5) 的最小解, $y = [y_1, y_2, y_3]^T$ 的分量有不同的3类, 仅$y_3$ 需从$N$ 阶方程(10) 解出, 其解如式(11) 所示; $y_2$ 可用式(12) 直接由$y_3$ 算出; $y_1$ 与$y_2, y_3$ 无关, 可从式(13) 算出。各式中的参数阵由式(7), (8a), (8b) 定义。

$y_3$ 的分量对应于受控变迁, 不妨称为能控序列$y$ 的控制分量, 它是式(8a) 算子作用下真正不变的部分, 可能分散于$n$ 个能达凝点中。$y_3$ 和$y_2$ 的分量为系统(2) (或称为$y$) 的全部能达分量, $y_2$ 可随$y_3$ 改变而改变; $y_1$ 的分量为系统(2) (或称为$y$) 的全部不能达分量(不能达凝点), 不随$y_3$(和$y_2$) 改变而改变。当选择$y$ 时, 注意到通过$I_c$, 仅有$y_3$ 能对系统产生作用; 用式(11) 选取$y_3$ 后, 再用式(12), (13) 的$y_2, y_1$ 来匹配构成$y$, 这个$y$ 即是$y_3$ 控制下系统(2) 的行为序列$x$。

现将式(10) 改写为

$$\tilde{A}_{33}y_3 \oplus \tilde{v} = y_3 \tag{14}$$

则有如下引理:

**引理2** 令$\bar{y}$ 是式(14) 的解, $\tilde{A}_{33}$ 的对角线元素 $\geq 0$, 则$\tilde{A}_{33}\bar{y} = \bar{y}$。

证明 $\tilde{A}_{33}\bar{y} \oplus \hat{v} = \bar{y}$, 则$\tilde{A}_{33}\bar{y} \leq \bar{y}$。因为$\tilde{A}_{33}$ 的对角线元素 $\geq 0$, 从而$\tilde{A}_{33}\bar{y} \geq \bar{y}$, 于是$\tilde{A}_{33}\bar{y} = \bar{y}$。

**定理4** 令$\hat{y}_3$ 是式(14) 的最小解, $\bar{y}_i$ 是式(14) 的解, $\tilde{A}_{33}$ 的对角线元素 $\geq 0$, 则$\sum_{i=1}^{n}{}_{\oplus}\, a_i\bar{y}_i$ 是式(14) 的解。其中, $a_i \in R^+ \cup \{0\}$, $R^+$ 是正实数解。

证明 由引理4, 有$\tilde{A}_{33}\bar{y}_i = \bar{y}_i$。用$a_i\bar{y}_i$ 代替$\bar{y}_i$, 则$\tilde{A}_{33}a_i\bar{y}_i = a_i\bar{y}_i$。对其求和, 得到

$$\tilde{A}_{33}\sum_{i=1}^{n}{}_{\oplus}\, a_i\bar{y}_i = \sum_{i=1}^{n}{}_{\oplus}\, a_i\bar{y}_i$$

因为$a_i\bar{y}_i \geq \bar{y}_i \geq \tilde{y}_3 \geq \tilde{v}$, 故$\sum_{i=1}^{n}{}_{\oplus}\, a_i\bar{y}_i$ 是式(14) 的解。(证毕)

用定理4可从式(14) 的最小解或已知解得到式(14) 的更多解。

参考文献:


[1] 陈文德, 齐向东. 离散事件动态系统, 极大代数方法[M]. 北京: 科学出版社, 1994.

[2] Cofer D D, V K Garg. Supervisory control of real-time discrete event systems using Lattice theorey[J]. IEEE Trans on Autom Contr. 1996, 199-209.

[3] Baccelli F L, G Cohen, G J Olsder *et al*. Synchronization and linearity——An algebra for discrete event systems[M]. New York: Wiley, 1992.

[4] Cuninghame-Green R A. Minimax Algebra[M]. Berlin: Springer, 1979.

[5] S Takai. A characterization of realizable behavior in supervisory control of timed event graphs[J]. Automatica, 1997, 33(11): 2077-2080.

[6] 戴华平. 流程工业综合自动化系统的若干理论与应用研究[D]. 杭州: 浙江大学, 1999.

[7] Z B Zhuo, W D Chen. Supervisory control of extended timed event graph[A]. Proc of Int Conf on Intell Contr Autom[C]. 2000.

[8] Cohen, G P Moller, J P Quadrat *et al*. Algebraic tools for the performance evaluation of discrete event systems[A]. Proc IEEE[C]. 1989. 39-58.