第 16 卷 第 1 期　　控 制 与 决 策　　2001 年 1 月
Vol. 16 No. 1　　CONTROL AND DECISION　　Jan. 2001

文章编号: 1001-0920(2001)01-0033-04

Job Shop 排序问题解空间定量分析

王 波[1], 张 群[2], 王 飞[1], 韦有双[1]
(1. 北京航空航天大学 经管学院, 北京 100083; 2. 北京科技大学 管理学院, 北京 100083)

摘 要: 讨论 Job shop 排序问题不可行解的构造情况, 给出了不可行解的一个充要条件以及 2 台机器 n 个加工工件的 Job shop 问题不可行解和可行解的计算公式, 并由此得到一种概率模型的计算方法。通过计算发现, Job shop 排序问题的不可行解所占比例非常大。

关键词: 排序; 死锁; 不可行解
中图分类号: O 223　　文献标识码: A

Quantitative Analysis of Infeasible Solution to Job Shop Scheduling Problem

WANG Bo[1], *ZHANG Qun*[2], *Wang Fei*[1], *WEI You-Shuang*[1]
(1. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China;
2. Beijing University of Science and Technology, Beijing 100083, China)

Abstract: Job shop sequencing problem (JSSP) is a well-known NP-hard problem. The construction of infeasible solution to JSSP is analyzed and a necessary and sufficient condition of infeasible solution is given. For a JSSP with 2 machines and n jobs, a recurrence formula is proposed for calculating the infeasilbe solution.

Key words: sequencing; deadlock pair; infeasible solution

1 引　　言

Job shop 排序问题的著名的 NP 难问题, 许多学者从事该问题的研究, 并已有很多有效的启发式算法。Job shop 排序问题的不可行解数目巨大, 对遗传算法、Tabu search 算法等有一定的影响。

本文通过对 Job shop 排序问题不可行解结构的分析, 给出 Job shop 排序问题不可行解的一个充要条件, 并获得求解 2 台机器加工 n 个工件的 Job shop 排序问题不可行解数目的递推公式, 由此得到这类问题概论模型的计算方法。通过计算发现, 工件数 n 不很大时, 不可行解所占比例超过 90%。

2 Job shop 排序问题不可行解分析

Job shop 问题定义如下:

1) m 台机器加工 n 个工件, 每个工件要经过 m 台机器加工; 2) 工件加工由一系列指定顺序的工序构成, 每个工件有其独特的加工线路; 3) 每道工序在一台机器上进行, 并知道其加工时间; 4) 不同工件的加工工序无优先权; 5) 每道工序不能中间中断, 每台机器在同一时间只能加工一个工件; 6) 目

收稿日期: 1999-05-24; 修回日期: 1999-09-20
基金项目: 国家自然科学基金项目(79430022)
作者简介: 王波(1960—), 男, 江西东乡人, 副教授, 博士, 从事生产管理等研究; 张群(1950—), 男, 湖北黄冈人, 教授, 博士生导师, 从事生产管理、环境经济的研究。

标是最小化完工时间。

求解满足以上条件的工件加工线路即构成 Job shop 排序问题。设 $M = \{1, 2, \cdots, m\}$ 表示加工机器集合, $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ 表示加工工件集合, 用 $O(i, j, k, p)$ 表示工件 j 的第 k 道工序在机器 i 上进行, 机器 i 的加工顺序为 p 工序(operation)。$i \in M, j \in N, k \in M, p \in N$。则可用一个有向无圈图来表示 Job shop 问题, 每个有向无圈图表示 Job shop 问题的一个解。图 1 为 3×3 阶 Job shop 问题的一个有向无圈图, 宽箭头线表示机器的加工顺序, 细箭头线表示每个工件的加工线路。

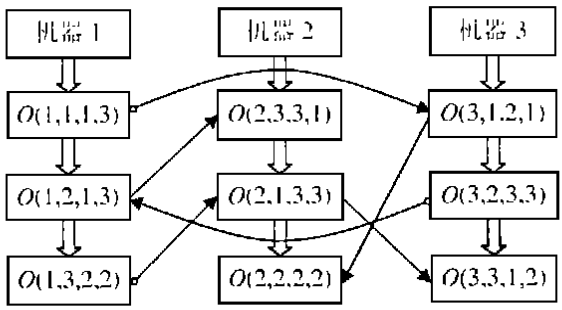

图 1　3×3 阶 Job shop 问题有向无圈图

定义 1　设工序 O_1, O_3 是属于工件 j_1 的机器 i_1 和机器 i_2 上加工的两道工序, O_2, O_4 是属于工件 j_2 在机器 i_i 和机器 i_2 上加工的两道工序。如果 O_1, O_2, O_3, O_4 构成无法实现的加工排序, 则称 O_1, O_2, O_3, O_4 构成一个死锁对(dead clock pair)(见图 2)。

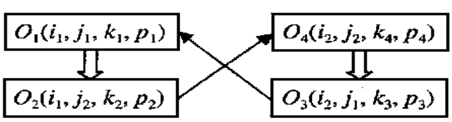

图 2　死锁示意图

定理 1　假定 $O_1(i_1, j_1, k_1, p_1)$, $O_2(i_1, j_2, k_2, p_2)$, $O_3(i_2, j_1, k_3, p_3)$, $O_4(i_2, j_2, k_4, p_4)$, $(p_1 \neq p_2, p_3 \neq p_4)$ 是 Job shop 排序问题的 4 道工序, 则它们构成死锁对的充要条件是 $k_3 < k_1, k_4 < k_2$ 和 $p_1 < p_2, p_4 < p_3$。

证明　充分性: 假设上述 4 个条件同时满足, $k_3 < k_1$ 和 $k_4 > k_2$ 分别表示加工线路为 $O_3 \to O_1$ 和 $O_2 \to O_4$; 而 $p_1 < p_2, p_4 < p_3$ 说明工序 O_1 在 O_2 前面加工, O_4 在 O_3 前面完成。由图 2 知, 加工线路上要求优先的工序受加工顺序排列在后的约束而无法实现, 故以上工序构成死锁对。

必要性: 1) 假设条件 $p_1 < p_2, p_4 < p_3$ 有一个不满足, 不妨设 $p_1 > p_2$。这时图 2 中 O\ - 1 与 O_2 交换位置, 沿着 $O_2 \to O_4 \to O_3 \to O_1$ 可实现以上 4 道工序, 从而不构成死锁对。同理, 当 $p_4 > p_3$ 时, 也不构成死锁对。2) 若 $k_3 < k_1$ 和 $k_4 > k_2$ 有一条件不满足, 不防设 $k_3 > k_1$。这时图 2 中工序加工线路由 $O_3 \to O_1$ 变成 $O_1 \to O_3$, 沿着 $O_1 \to$ O\ - 2 $\to O_4 \to O_3$ 也可实现以上 4 道工序而不构成死锁对。同样, 当 $k_4 > k_2$ 时, 也不构成死锁对。(证毕)

由上述的分析图可见, 对于构成死锁对的 4 道工序, 从任一工序出发, 沿着加工线路(细箭线)和加工顺序(宽箭线)方向前进, 可构成回到原工序的回路。

定义 2　设 $O_1(i_1, j_1, k_1, p_1)$, $O_3(j_2, j_1, k_3, p_3)$, $O_2(i_1, j_2, k_2, p_2)$, $O_4(i_2, j_2, k_4, p_4)$ 分别是属于工件 j_1 和 j_2 的 4 道工序。若满足 $k_3 < k_1$ 和 $k_4 > k_2$, 则称这 4 道工序构成一个逆序对(inverse order pair)。

根据定理 1 可得以下推论:

推论 1　构成死锁对的 4 道工序必构成逆序对。

3　2 台机器加工 n 个工件的 Job shop 问题的不可行解分析

Job shop 问题的一个死锁对即构成一个不可行解。Job shop 问题有多少不可行解, 可通过 2 台机器 n 个工件的 Job shop 问题给出答案。设加工机器为机器 1 和机器 2, 将 n 个工件分成两类: 设第 1 道工序在第 1 台机器上进行, 第 2 道工序在第 2 台机器上进行的工件集合为 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_3\}$; 第 1 道工序在第 2 台机器上进行, 第 2 道工序在第 1 台机器上进行的工件集合为 $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_t\}$, $s + t = n$。记 A 中工件为常序工件, B 中工件为反序工件, 则有以下结论:

结论 1　同时属于 A 或 B 中任两工件的加工工序不构成死锁对, 即只有 A 中工件与 B 中工件的工序才构成死锁对。

结论 2　设 $O(1, b, 2, p_1)$, $O(2, b, 1, p_2)$ $(b \in B)$ 为两道工序, 当 $p_1 = n$ 或 $p_2 = 1$ 时, 这两道工序与 A 中任一工件的加工工序不构成死锁对。

结论 3　根据对称性, 当 $s = s_0, t = n - s_0$ 时, Job shop 排序问题的不可行解数目与 $s = n - s_0, t = s_0$ 时的数目相同。

用 $Y(n, t)$ 表示 n 个加工工件中有 t 个反序工件(即 B 中有 t 个工件)的 Job shop 排序问题的所有不可行解(即死锁对)数; $Y(n, t, k)(k \leq t)$ 表示在 n 个工件中有 t 个反序工件的情况下, A 中工件的工序只与 B 中 t 个反序工件中的 k 个工件的工序构成不可行解的数目。则有如下定理:

定理 2　当 $t = 1$ 时, 有

$$Y(n,1) = n!(n-1)!\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} \qquad (1)$$

证明　当 $t=1$ 时, 设 $B=\{b\}$, $O(2,b,1,p)$ 和 $O(1,b,2,p')(1\le p,p'\le n)$ 是属于 b 的两道工序。下面分别对 p 的取值进行讨论。

1) 当 $p=n$ 时, 排在 $O(2,b,1,p)$ 前机器2加工的属于 A 的 $n-1$ 个工件, 其加工工序 $O(2,a_i,2,p_i)(1\le i,p_i\le n-1)$ 的排列有 $(n-1)!$ 种。对于机器2的每一种排法, 与 $O(2,a_i,2,p_i)$ 对应的在机器1上加工工序 $O(1,a_i,1,p_i')(1\le i\le n-1)$ 的排列有 $(n-1)!$ 种。当这 $n-1$ 个工序排好后, 只需将工序 $O(1,b,2,p')$ 排在任一工序 $O(1,a_i,1,p_i')$ 前, 即可构成死锁(见图3)。因此 $O(1,b,2,p')$ 有 $n-1$ 种排法, 共有

$$(n-1)!(n-1)!(n-1) = n!(n-1)!\frac{n-1}{n}$$

种死锁对。

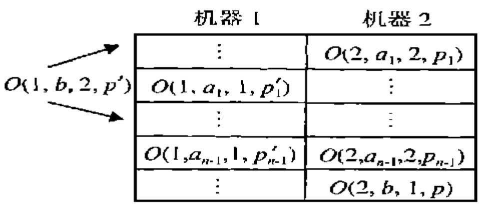

图3　$p=n$ 时死锁构成示意图

2) 当 $p=n-1$ 时, 排在 $O(2,b,1,p)$ 前机器2加工的属于 A 的 $n-2$ 个工件的工序 $O(2,a_i,2,p_i)(1\le i,p_i\le n-2)$ 的排法, 等于从 $n-1$ 个工序中选出 $n-2$ 个进行排列, 因此有 P_{n-1}^{n-2} 种, 而排在 $O(2,b,1,p)$ 后属于 A 的一个工序排法只有一种, 因此机器2加工工序的排法为 $P_{n-1}^{n-2}\times 1!$ 种。对于机器2加工工序的每一种排法, 与 $O(2,a_i,2,p_i)$ 对应的在机器1上加工工序 $O(1,a_i,1,p_i')(1\le i\le n-2)$ 的排列有 $(n-2)!$ 种。将工序 $O(1,b,2,p')$ 排在任一这样的工序 $O(1,a_i,1,p_i')$ 前即可构成死锁, 故 $O(1,b,2,p')$ 的排法有 $n-2$ 种。当上面的 $n-1$ 道工序排好后, 剩下的一道工序 $O(1,a_n,1,p_n')$ 可排在上述 $n-1$ 道工序任一前后, 从而有 n 种排法。因此共有

$$P_{n-1}^{n-2}(n-2)!(n-2)n = n!(n-1)!\frac{n-2}{n-1}$$

3) 一般情况, 即 $p=k$ 时, 排在 $O(2,b,1,p)$ 前机器2加工的属于 A 的 $k-1$ 道加工工序 $O(2,a_i,2,p_i)(1\le i,p_i\le k-1)$ 的排列方法有 P_{n-1}^{k-1} 种, 排在 $O(2,b,1,p)$ 后的 $n-k$ 道工序 $O(2,a_i,a,p_i)(k+1\le i,p_i\le n)$ 的排列有 $(n-k)!$ 种, 因此机器2加工工序的排列方法为 $P_{n-1}^{k-1}(n-k)! = (n-1)!$ 种。

下面对机器1加工工序进行排列。与 $O(2,a_i,2,p_i)(1\le i,p_i\le k-1)$ 对应的工序 $O(1,a_i,1,p_i')(1\le i\le k-1)$ 的排列方法有 $(k-1)!$ 种。当这 $k-1$ 个工序排好后, 将 $O(1,b,2,p')$ 排在这些工序任一前面即构成死锁对。$O(1,b,2,p')$ 的排法有 $k-1$ 种, 剩下的 $n-k$ 个工序 $O(1,a_i,1,p_i')(k+1\le i\le n)$ 可依次排在 k 个已排好工序的任一前后, 故有 $P_n^{n-k} = n(n-1)\cdots(k+1)$ 种。因此得到这种情况的不可行解为

$$P_{n-1}^{k-1}(n-k)!(k-1)!(k-1)!P_n^{n-k} = n!(n-1)!(k-1)/k$$

由结论2知, 当 $p=1$ 时, 不构成死锁对。综合以上讨论, 可得(1)式。(证毕)

下面讨论求解 $Y(n,t)$ 的方法。这时 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_t\}$, $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-t}\}$。根据 $Y(n,t,k)(1\le k\le t)$ 的定义, 有如下引理:

引理1
$$Y(n,t)=\sum_{i=1}^{t}\binom{t}{i}Y(n,t,i) \qquad (2)$$

证明　所有的死锁对均由 A 中工件的工序分别与 B 中 i 个工件的工序构成, 而从 B 中选出 i 个元素的组合为 $\binom{t}{i}$, 因此(2)式成立。

引理2
$$n^2Y(n-1,t-1,k) = Y(n,t,k)+Y(n,t,k+1) \qquad (3)$$

证明　在 $Y(n-1,t-1,k)$ 的条件下, 即 $n-1$ 个工件中有 $t-1$ 个反序工件, A 中 $n-t$ 个工件的工序只与 B 的 $t-1$ 个反序工件中 k 个工件的工序构成死锁对。现增加一个反序工件 b_0, b_0 的两个加工工序可任意排列, 这样的排列方法有 $n^2Y(n-1,t-1,k)$ 种。当增加 b_0 的两工序后, 会出现不增加新的死锁对和增加新的死锁对两种情况: 不增加新死锁对时的排法为 $Y(n,t,k)$, 而增加新死锁对的排法为 $Y(n,t,k+1)$, 因此式(3)成立。

引理3
$$Y(n,t)=n^2Y(n-1,t-1)+Y(n,t,1) \qquad (4)$$

引理4

$$Y(n,t,t)=n!(n-t)!\sum_{p_1=2}^{n}\cdots\sum_{p_t=2,p_t\ne p_3}^{n}\frac{(p_1-1)(p_2-2)\cdots(p_t-1)}{p_1p_2\cdots p_t} \qquad (5)$$

证明　仅对 $t=2$ 的情况给予证明; 对 t 为一般值的情况, 证明方法类似。设 $B=\{b_1,b_2\}$, $O_1\{1,b_1,2,p_1'\}$, $O_2(2,b_1,1,p_1)$ 和 $O_3(1,b_2,2,p_2'-2)$, $O_4(2,b_2,1,p_2)$ 分别是属于 b_1 和 b_2 的4个工序。对于

O_2, O_4 的任意一种位置排列, 即 $p_1, p_2 (2 \le p_1, p_2 \le n, p_1 \ne p_2)$ 的一种排列, 余下的由机器 2 加工的 $n-2$ 道工序的排列共有 $(n-2)!$ 种。记排在 O_2 前的工序为 $O_k(2, j_1, k_1, r_1)$, $1 \le r_1 \le p_1 - 1$; 排在 O_4 前的工序为 $O_l(2, j_2, k_2, r_2)$, $1 \le r_2 \le p_2 - 1$; 与 O_k, O_l 相对应的同一工件在机器 1 上加工的工序为 $O'_k(1, j_1, k'_1, r'_1)$, $O'_l(1, j_2, k'_2, r'_2)$。只要将 O_2 排在任一 O'_k 前, O_4 排在任一 O'_l 前就可与 b_1, b_2 的工序同时构成死锁对。这时 Q_1 的排列共有 $p_1 - 1$ 种, O_3 的排列共有 $p_2 - 1$ 种, 其他在机器 1 上加工的工序可任意排列。此时, 与 b_1, b_2 工序同时构成死锁对而在机器 1 上加工工序的排列数有:

当 $p_2 \ge p_1$ 时为

$$1 \times 2 \cdots (p_1 - 1)(p_1 - 1)(p_1 + 1) \cdots (p_2 - 1)(p_2 - 1)(p_2 + 1) \cdots n$$

当 $p_1 \ge p_2$ 时为

$$1 \times 2 \cdots (p_2 - 1)(p_2 - 1)(p_2 + 1) \cdots (p_1 - 1)(p_1 - 1)(p_1 + 1) \cdots n$$

上面两式可简化为 $n! \dfrac{(p_1 - 1)(p_2 - 1)}{p_1 p_2}$。于是 2 台机器加工的死锁对数目共有 $(n-2)!\, n! \dfrac{(p_1 - 1)(p_2 - 1)}{p_1 p_2}$ 种。让 p_1, p_2 取遍所有满足 $2 \le p_1, p_2 \le n (p_1 \ne p_2)$ 的值, 便可得到

$$Y(n, 2, 2,) = \sum_{p_1 = 2}^{n} \sum_{p_2 = 2, p_2 \ne p_1}^{n} n! (n-2)! \frac{(p_1 - 1)(p_2 - 1)}{p_1 p_2}$$

定理 3

$$Y(n, t) = n^2 Y(n-1, t-1) + n^2 \sum_{i=1}^{t-1} (-1)^{i+1} Y(n-1, t-1, i) + (-1)^{t+1} Y(n, t, t) \tag{6}$$

证明　由引理 3 知, $Y(n, t) = n^2 Y(n-1, t-1) + Y(n, t, 1)$, 再根据引理 2 得

$$Y(n, t) = n^2 Y(n-1, t-1) + n^2 Y(n-1, t-1, 1) - Y(n, t, 2)$$

反复应用引理 2, 可得

$$Y(n, t) = n^2 Y(n-1, t-1) + n^2 \sum_{i=1}^{t-1} (-1)^{i+1} Y(n-1, t-1, i) + (-1)^{t+1} Y(n, t, t)$$

由定理 3 的证明过程可知

$$Y(n, t, 1) = n^2 \sum_{i=1}^{t-1} (-1)^{i+1} Y(n-1, t-1, i) + (-1)^{t+1} n! (n-t)! \sum_{p_1 = 2}^{n} \cdots \times \sum_{p_t = 2, p_t \ne p_i}^{n} \frac{(p_1 - 1)(p_2 - 2) \cdots (p_t - 1)}{p_1 p_2 \cdots p_t}$$

根据 $Y(n-1, t-1, i) (1 \le i \le t-1)$ 和 $Y(n, t, t)$ 的值, 可求出 $Y(n, t, 1)$。再根据式(3), 由 $Y(n, t, 1)$ 和 $Y(n-1, t-1, i) (1 \le i \le t-1)$ 算出 $Y(n, t, i) (i \le i \le t-1)$。再由式(2) 算出 $Y(n, t)$, 因此从 $Y(n, 1)$ 和 $Y(n, 2, 2)$ 出发, 可计算出所有的 $Y(n, t)$ 值。

4 结　　语

本文通过对 Job shop 排序问题不可行解的分析, 得到了 Job shop 排序问题不可行解的一个充要条件, 并给出了求解 2 台机器加工 n 个工件的 Job shop 排序问题不可行解数量的递推公式。经过计算发现, 对于 $Y(n, 1)$, 当 $n = 50$ 时, 不可行解比例达到 91%; 对于 $Y(n, 2)$, 当 $n = 20$ 时, 不可行解比例达到 95.6%; 而对于 $Y(n, 3)$, 当 $n = 10$ 时, 不可行解比例达到 93.8%。这说明 Job shop 排序问题不可行解所占比例极高, 也说明了为什么在使用遗传算法这类产生随机的解时会遇到如此多的不可行解问题。对于多于 2 台机器的情况, 不可行解的比例将更高。由于这时出现相互交叉构成死锁, 求解不可行解的情况非常复杂, 有待于进一步研究。

参考文献:

[1] Wei Youshuang, Bai Manying, Feng Yuncheng. A preliminary analysis of unfeasible solutions to the job shop scheduling problem[A]. ISIM '98 Proc of the Fourth China-Japan Int Symp on Industrial Management[C]. 1998.

[2] Adams E Balas, D Zawack. The shift bottleneck procedure for job shop scheduling[J]. Management Science, 1988, 34(3): 391-401.

[3] Garey M R, Johnson D S, Sethi R. The complexity of flow shop and job-shop scheduling[J]. Math Ops Res, 1976, 10(1): 117_129.

[4] 陈荣秋. 排序的理论与方法[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1987.

[5] Daniel I A Cohen. 组合理论的基本方法[M]. 北京: 北京大学出版社, 1989.