

文章编号: 1001-0920(2001)01-0037-05

基于仿真的可重入排队网络灵敏度分析

王利存¹, 郑应平²

(1. 中国科学院自动化研究所, 北京 100080; 2. 同济大学 CIMS 研究中心, 上海 200092)

摘要: 由马尔可夫链的 Poisson 方程推导了系统平均费用型品质指标对参数的导数公式, 并给出了相应的估计算法。对可重入排队系统建立马尔可夫模型, 通过仿真单个样本轨迹, 应用给出的算法求出系统品质对参数的灵敏度, 并分析了某些优先级调度策略的鲁棒性。仿真结果证明了该算法的实用性和有效性。

关键词: 灵敏度分析; 马尔可夫链; 排队网络; 仿真

中图分类号: TP 271

文献标识码: A

Simulation Based Sensitivity Analysis of Re-entrant Queuing Networks

WANG Li-cun¹, ZHENG Ying-ping²

(1. Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;

2. CIMS Research Center, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Based on the Poisson equation of Markov chain, the formula of derivatives of system performance with respect to system parameters is presented. Corresponding algorithm to estimate the derivatives is given. Then, Markov models of some re-entrant manufacturing systems are established. After simulating single sample paths of these models, the sensitivity of system performance to parameters of these re-entrant manufacturing systems is investigated. The robustness of some priority scheduling policies is analyzed. Simulation results demonstrate the practicality and efficiency of the algorithm.

Key words: sensitivity analysis; Markov chain; queuing network; simulation

1 引言

随着 VLSI 等高新技术产品生产线的出现, 需要研究一类特殊的排队网络——可重入 (Re-entrant) 排队网络。由于其复杂度较高, 使可重入系统的调度和性能分析都更为困难, 因而引起众多学者的关注^[1-3]。本文主要研究可重入排队系统的灵敏度问题, 旨在考虑参数扰动导致系统演化对系统品质

指标的最终影响。

由于可重入排队系统的情形较复杂, 难以给出系统稳态分布概率的精确形式, 不能利用排队论中稳态品质指标公式对待选参数求导的方法, 获得品质指标对参数的灵敏度。最近, Cao 提出一种基于马尔可夫模型的新方法, 给出了马尔可夫链的稳态品质指标对状态转移矩阵沿某方向矩阵的导数公式^[4], 文献[5]给出了相应的灵敏度分析算法。但已

收稿日期: 2000-03-22; 修回日期: 2000-07-19

基金项目: 国家重点基础研究发展规划项目(G 1998020302); 西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室资助课题

作者简介: 王利存(1969—), 男, 山东济宁人, 博士生, 从事排队网络的品质分析及优化、马氏决策过程与增强型学习等研

究; 郑应平(1941—), 男, 福建福州人, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统、CIMS 等研究。 <http://www.cnki.net>

有算法尚不能直接应用于可重入生产线这样的复杂系统。

对具有可数状态且一步转移费用函数无界的马尔可夫链,由其势函数对参数的连续性,本文直接从马尔可夫链的 Poisson 方程推导出系统品质指标对参数的导数公式,进而给出基于系统返回某正常返状态时间的灵敏度估计算法;以平均在制工件数为系统品质指标,对两种结构的可重入生产系统,通过仿真计算分别研究其品质指标对来料率和机器生产率的灵敏度,并进行相关比较。

2 可重入生产系统的马尔可夫模型

基本的开环可重入生产系统可建模如下:

系统由 Γ 台机器组成,输入工件以 Poisson 流到达机器 $\sigma(1) \{1, 2, \dots, \Gamma\}$ 上的缓冲区 b_1 , 到达率为 λ 完成服务后进入机器 $\sigma(2) \{1, 2, \dots, \Gamma\}$ 上的缓冲区 b_2 , 机器 $\sigma(L)$ 上的缓冲区 b_L 最后被访问。不同缓冲区内的工件类型是不同的,对于第 i 类工件,缓冲区 b_i 所在的机器 $\sigma(i)$ 加工工件的时间服从负指数分布,加工率为 $\mu_i, i = 1, 2, \dots, L$ 。对于不同的缓冲区 b_i 和 $b_j, i \neq j$,可能有 $\sigma(i) = \sigma(j)$, 故称此类生产系统为可重入的^[2]。由于其复杂度较高,可重入系统的调度和性能分析都较为困难。即使对图 1 所示的两台机器组成的系统,目前还只是给出静态的启发式调度策略^[2,3],如最后缓冲区最先服务(LBFS)和最先缓冲区最先服务(FBFS),策略的优劣只能通过仿真分析进行比较。而由系统品质指标出发的最优化调度结果还不多见。

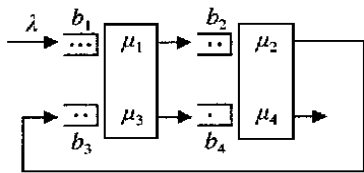


图 1 可重入生产系统示例 1

对一定调度策略下的可重入生产系统,引入以下表示: $n_i(t)$ 为 t 时刻缓冲区 b_i 中的工件数,包括正在被服务的工件; $x_t = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_L(t)]^T$ 为系统中的工件队长向量,可看成是马尔可夫过程的状态; P 为状态转移概率矩阵,是参数 λ 和 $\mu(i = 1, 2, \dots, L)$ 的函数。一步费用函数是所有缓冲区中的工件总数,即 $f(x_t) = \sum_{i=1}^L n_i(t)$ 。将此连续时间的马尔可夫过程离散化为马尔可夫链 $\{x_n, n = 0, 1, \dots\}$,

其状态空间 $S = \{1, 2, \dots\}$, 品质指标函数为系统中平均在制工件数

$$\eta = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N E_x[f(x_n) | x_0 = x] \quad (1)$$

如果平衡方程

$$\pi P = \pi, \quad \pi e = 1, \quad e = [1, 1, \dots]^T$$

有唯一解 $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots]$, π 为状态 i 的稳态概率分布,且使稳态品质指标

$$\eta = E_{\pi}(f) = \sum_i \pi_i f_i$$

则称系统是稳定的。

Meyn 通过分析可重入排队网络的 f -正则性、 f -遍历性以及流模型的 L_2 稳定性的等价关系,研究了系统的稳定性^[1,6],指出缓冲区全空时的状态 $0 = [0, 0, \dots, 0]^T$ 在所有满足稳定条件的参数下都是正常返的,并且任一状态返回正常返状态 0 的期望时间是一致有界的。

3 马尔可夫链品质指标对系统参数的导数公式

考虑正常返不可约的马尔可夫链 $\{x_n, n = 0, 1, \dots\}$, 具有可数状态空间 $S = \{1, 2, \dots\}$, x_n 是系统在时刻 n 的状态。状态转移概率矩阵与参数 $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K]^T \in R^K$ 相关,记为 $P(\theta)$, 其元素 $p_{ij}(\theta) = P(x_n = j | x_{n-1} = i, \theta)$ 。当状态为 i 时,有一步费用函数 $f_i(\theta)$ 。对于所研究的可重入生产系统, f_i 与 θ 无关,故本文只考虑 f_i 与 θ 无关的情形。记 $f = [f_1, f_2, \dots]^T$, 系统的品质指标定义如式(1)。令 $\Pi = \{P(\theta) | \theta \in \Theta\}$, Θ 是有可能满足系统稳定性约束的参数 θ 的集合。 Π 的闭包为 $\bar{\Pi}$, $\bar{\Pi}$ 中的每个元素都是随机矩阵,定义了具有相同状态空间的马尔可夫链。为简便起见,以下公式中略去 θ 。

η 对参数 θ 的灵敏度是一个重要问题。首先考虑系统品质指标对参数分量 $\theta_l (l = 1, 2, \dots, K)$ 的灵敏度。假设 θ_l 变为 $\theta_l + \Delta$, 使得转移概率矩阵由 P 变成 P_{Δ} 。 P_{Δ} 仍是一个转移概率矩阵,其稳态分布为 π_{Δ} , 相应的品质指标为 η_{Δ} 。研究如下定义的偏导数

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta_l} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\eta_{\Delta} - \eta}{\Delta}, \quad l = 1, 2, \dots, K$$

下面直接由马尔可夫链的 Poisson 方程给出系统品质指标相对于参数分量 $\theta_l (l = 1, 2, \dots, K)$ 的偏导数公式。

假设 1 对于每一个 $P \in \bar{\Pi}$, 马尔可夫链是非周期的,而且至少存在一个状态 i , 对于每一个这

样的马尔可夫链都是正常返的。定义首次返回状态 i^* 的时刻为

$$T = \min\{n \geq 1 \mid x_n = i^*\}$$

假设 2 (常返条件)

$$T(i) = E_i[T] =$$

$$E[\min\{n \geq 1 \mid x_n = i^* \mid x_0 = i\}] < \infty, \quad i \in S$$

假设 3 (可积条件)

$$C(i) = E_i\left[\sum_{n=0}^{T-1} f(x_n)\right] =$$

$$E\left[\sum_{n=0}^{T-1} f(x_n) \mid x_0 = i\right] < \infty, \quad i \in S$$

满足假设 1 ~ 假设 3 的马尔可夫链是 f-正则的^[1, 6]。f-正则的马尔可夫链总有唯一不变的概率分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$, 使得 $\eta = \pi f < \infty$ 。

假设 4 状态转移概率矩阵 $P = \Pi$ 对参数 $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K]^T \in R^K$ 的导数存在。

由文献[7], 若假设 1 ~ 假设 3 成立, 则 Poisson 方程

$$\eta e + g = f + Pg \quad (2)$$

的解 g 和 η 由下式

$$\eta = \frac{C(i^*)}{T(i^*)}, \quad g_i = C(i) - \eta T(i), \quad i \in S$$

给出。若 f 和 P 在 Θ 内连续, 则 $T(i)$ 和 $C(i)$ 在 Θ 内连续, 从而 $g_i(i \in S)$ 在 Θ 内连续。 $g = [g_1, g_2, \dots]^T$ 称为马尔可夫链的势函数(也称相对值函数)。

再考虑 P_Δ 对应的马尔可夫链所满足的 Poisson 方程

$$\eta_{\Delta e} + g_\Delta = f + P_\Delta g_\Delta \quad (3)$$

式(3)减式(2), 且两边同时左乘以 π , 得

$$\eta_\Delta - \eta = \pi(P_\Delta - P)g_\Delta$$

由状态转移矩阵对参数的可导性和势函数对参数的连续性, 易得

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \pi \frac{\partial P}{\partial \theta} g, \quad l = 1, 2, \dots, K \quad (4)$$

从而系统品质指标对参数向量 $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K]^T \in R^K$ 的梯度为

$$\nabla \eta = \left[\frac{\partial \eta}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \eta}{\partial \theta_K} \right] = \left[\pi \frac{\partial P}{\partial \theta_1} g, \dots, \pi \frac{\partial P}{\partial \theta_K} g \right] \quad (5)$$

4 基于样本轨迹的灵敏度估计算法

对于复杂的系统, 其稳态概率分布 π 和势函数 g 难以直接解出, 不能由式(4)给出品质指标对系统

参数导数的确切解, 只能首先估计 π 和 g , 再由式(4)计算出品质指标对系统参数的导数。由第 3 节的结论, 可给出状态 i 的势函数

$$g_i = E\left[\sum_{k=0}^{T-1} (f(x_k) - \eta) \mid x_0 = i\right] \quad (6)$$

引入以下符号: t_m 为第 m 次访问正常返状态 i^* 的时刻, m 为访问状态 i^* 的次数, 序列 $x_{t_m}, x_{t_m+1}, \dots, x_{t_{m+1}}$ 为访问 i^* 的第 m 个更新周期内的马尔可夫链, 记 $T_m = t_{m+1} - t_m$ 。对于固定的 θ , 随机变量 T_m 是独立同分布的, 具有有限的期望值, 且 $T = E[T_m]$ 。

记 $Q_l = \partial P / \partial \theta$, 其中 Q_l 的元素 $q_{ij}^l = \partial p_{ij} / \partial \theta_l, l = 1, 2, \dots, K$ 。则式(4)可写成

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \pi Q_l g = \sum_i \pi_i \sum_j p_{ij} \left(\frac{q_{ij}^l}{p_{ij}} g_j \right) \quad (7)$$

式(7)右边可看成是 $g_j q_{ij}^l / p_{ij}$ 相对于状态由 i 转移到 j 的稳态概率 πp_{ij} 的期望。对于 $\pi Q_l g$ 的每一项 $\pi q_{ij}^l g_j$, 由于不能从已知马尔可夫链的样本中直接估计出来, 需要采用仿真问题中的重要性采样技术^[5, 8], 通过仿真 $\pi p_{ij} g_j$ 而估计得到 $\pi q_{ij}^l g_j$ 。这种为了研究一个具有某种概率分布的随机过程, 而仿真另一个具有不同概率分布的随机过程的技术, 在随机系统性能分析中是较为常用的。

根据式(6)给出的 g 的定义, 由下式给出势函数在时间区间 $(t_m, t_{m+1}]$ 内的估计

$$\tilde{g}_{x_n} = \sum_{k=n}^{t_{m+1}-1} (f(x_k) - \eta_k) \quad (8)$$

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \alpha_k (f(x_k) - \eta_k) \quad (9)$$

其中, η_k 是 η 的估计值, α_k 为正的步长序列, 满足

$$\alpha_k = \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$$

式(9)利用了随机逼近可以求期望的性质, 因此令

$$F_m = \sum_{n=t_m}^{t_{m+1}-1} \tilde{g}_{x_n} \frac{q_{x_n-1, x_n}^l}{p_{x_n-1, x_n}}, \quad l = 1, 2, \dots, K$$

对于不同的 m 值, 随机变量 F_m 是独立同分布的, 这是因为在不同更新周期内, 状态的变迁也是独立的, 类似于文献[8]中对有限状态马尔可夫链的结果。由 f-遍历性条件, 有 $E[F_m] = \pi Q_l g E[T_m]$ 。从而可通过累加不同周期内 F_m 的估计值, 并对其求平均, 得到对 $\partial \eta / \partial \theta$ 的估计

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^M F_m}{M} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^M F_m}{t_{M+1} - t_1}$$

w. p. 1 (10)

其中 w. p. 1 表示“以概率 1”。下面给出计算 F_m 的一种简便方法, 考虑到

$$F_m = \prod_{n=t_m+1}^{t_{m+1}} g_{x_n} \frac{q_{x_{n-1}x_n}^l}{p_{x_{n-1}x_n}} = \prod_{k=t_m+1}^{t_{m+1}} (f_{x_k} - \eta_k) \prod_{n=t_m+1}^k \frac{q_{x_{n-1}x_n}^l}{p_{x_{n-1}x_n}}$$

设 $z_k^l = \frac{q_{x_{n-1}x_n}^l}{p_{x_{n-1}x_n}}$, $k = t_m + 1, \dots, t_{m+1}, l = 1, 2, \dots, k$, 则有

$$F_m = \prod_{k=t_m+1}^{t_{m+1}} (f_{x_k} - \eta_k) z_k^l, \quad l = 1, 2, \dots, K \quad (11)$$

其中 z_k^l 可以递推地更新。利用

$$z_m^l = 0 \quad (12)$$

$$z_{k+1}^l = z_k^l + \frac{q_{x_k x_{k+1}}^l}{p_{x_k x_{k+1}}}$$

$$k = t_m, \dots, t_{m+1} - 1, \quad l = 1, 2, \dots, K \quad (13)$$

以上导数估计算法可简述如下: 首先根据转移概率 $p_{ij}(\theta)$ 仿真马尔可夫链的样本轨迹, 在每一次状态转移时刻 k , 更新品质指标估计 η_k ; 然后从 t_m 时刻开始, 利用式(12)和式(13)计算 z_k^l , 直到下一次访问 i^* 的时刻 t_{m+1} , 再由式(11)计算 F_m ; 最后利用式(10)得到对 $\partial/\partial\theta$ 的估计。相应地, 由式(5)可给出系统品质指标对参数向量 θ 的梯度 $\nabla_{\theta}\eta$ 。

5 仿真实验结果

对不同的可重入生产系统结构和调度策略, 状态转移概率是不同的。例如对图 1 所示的系统 1, 采用 LBFS 调度策略, 选取适当的时间单位, 使 $\lambda + \mu_i = 1$, 则离散化后马尔可夫链的状态转移概率分别为

$$\begin{aligned} p(n_1, n_2, n_3, n_4; n_1 + 1, n_2, n_3, n_4) &= \lambda \\ p(n_1, n_2, n_3, n_4; n_1 - 1, n_2 + 1, n_3, n_4) &= \mu_1 \delta(n_1) [1 - \delta(n_3)] \\ p(n_1, n_2, n_3, n_4; n_1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4) &= \mu_2 \delta(n_2) [1 - \delta(n_4)] \\ p(n_1, n_2, n_3, n_4; n_1, n_2, n_3 - 1, n_4 + 1) &= \mu_3 \delta(n_3) \\ p(n_1, n_2, n_3, n_4; n_1 + 1, n_2, n_3, n_4 - 1) &= \mu_4 \delta(n_4) \end{aligned}$$

$$1 - \lambda - \sum_{i=1}^4 \mu_i b_i$$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

其中

$$[b_1, b_2, b_3, b_4] = [\delta(n_1) (1 - \delta(n_3)), \delta(n_2) (1 - \delta(n_4)), \delta(n_3), \delta(n_4)]$$

同理, 可给出系统 1 在 FBFS 调度策略以及图 2 所示的系统 2 在 LBFS 和 FBFS 调度策略下的状态转移概率。

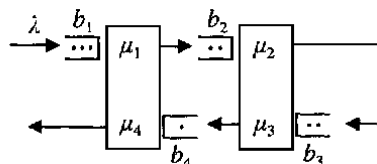


图 2 可重入生产系统示例 2

状态转移概率矩阵 P 对参数 λ 和 $\mu_j (j = 1, 2, 3, 4)$ 的连续性和可导性是明显的, 而费用函数 f 与参数 λ 和 μ_j 无关, 因此势函数 g 是关于参数 λ 和 $\mu_j (j = 1, 2, 3, 4)$ 连续的。Meyn 的结果表明, 图 1 和图 2 的可重入生产系统满足前述假设, 使得可通过仿真系统的单个样本轨迹, 利用式(4), (5) 及算法(10) ~ (13) 来研究系统稳态品质指标 η 对参数 λ 和 μ_j 的灵敏度。

表 1 给出了当 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 3/13, \lambda = 1/13$ 时, 系统 1 和系统 2 分别在 LBFS 和 FBFS 策略下的系统品质指标估计及其对 λ 和 μ_4 的导数估计值。品质指标 η 对每个参数的导数都估计 10 次, 然后取其平均值; 每次进行估计的样本轨迹长度为 50 000 个返回状态 0 (缓冲区全空) 周期。通过对式(5)分析可知, 对于同一个生产系统的相同调度策略, 系统品质指标对不同参数的导数可由同一个样本轨迹估计出来, 而不必针对不同的参数进行多次仿真。

由 $\partial/\partial\theta$ 的符号可见, 系统 1 和系统 2 在 LBFS 和 FBFS 调度策略下的品质指标对参数 λ 是单调增的, 而对参数 μ_4 是单调减的, 这与实际情形相符。进一步分析比较 $|\partial/\partial\theta|$ 可知, 对相同的系统结构, LBFS 策略的调度结果优于 FBFS 策略, 且对同一参数, LBFS 策略比 FBFS 策略的鲁棒性强。另外, 对于 FBFS 调度策略, 系统 1 对参数 λ 和 μ_4 的鲁棒性略强于系统 2; 而对于 LBFS 调度策略, 系统 2 的鲁棒性稍强于系统 1。因此, 在初始工件到达率和机器效率均相同的情况下, 考虑系统的平均型品质指标及其

表 1 可重入生产系统品质指标及其对 λ 和 μ_4 的导数估计

系统	调度策略	参数 θ	$\partial \eta / \partial \theta$	η
系统 1	FBFS	λ	199.860 9	4.678 8
		μ_4	- 162.695 3	
	LBFS	λ	126.958 4	3.638 2
		μ_4	- 14.309 8	
系统 2	FBFS	λ	202.300 4	4.723 8
		μ_4	- 167.647 9	
	LBFS	λ	125.845 1	3.493 1
		μ_4	- 13.785 9	

对参数 λ 和 μ_4 的灵敏度, 应采用图 2 所示的系统结构和 LBFS 调度策略。同理, 可应用算法估计可重入生产系统对其它参数的灵敏度, 将最可靠的机器置于系统对参数最灵敏的位置, 以保证系统可靠运行。

6 结 论

本文通过研究马尔可夫链 Poisson 方程的解对系统参数的连续性, 给出了马尔可夫链平均型品质指标对模型参数的梯度估计算法, 进而对系统品质指标对参数的灵敏度进行分析, 研究小的扰动经系统演化对系统品质指标的最终影响。

计算机仿真实验结果表明, 本文的算法能极大地减小系统仿真优化中的计算量, 可用于系统的在线品质优化。

参考文献:

[1] P R Kumar, S P Meyn. Stability of queueing networks

and scheduling policies[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1995, 40(2): 251-260.

[2] P R Kumar. Scheduling manufacturing systems of reentrant lines[A]. Stochastic Modeling and Analysis of Manufacturing Systems[C]. New York: Springer-Verlag, 1994. 325-360.

[3] 郑应平, 赵丽娜. 离散事件与混杂系统的调度控制[J]. 控制理论与应用, 1999, 16(S): 82-86.

[4] Xi-ren Cao, Han-fu Chen. Perturbation realization, potentials and sensitivity analysis of Markov processes [J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1997, 42(10): 1382-1393.

[5] Xi-ren Cao, Yat-wah Wan. Algorithms for sensitivity analysis of Markov systems through potentials and perturbation realization[J]. IEEE Trans on Contr Syst Tec, 1998, 6(4): 482-493.

[6] P R Kumar, Sean P Meyn. Duality and linear programs for stability and performance analysis of queueing networks and scheduling policies[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1996, 41(1): 4-17.

[7] A M Makowski, A Shwartz. On the Poisson equation for countable Markov chains: Existence of solutions and parameter dependence by probabilistic methods [R]. Technical Report T R 94-87. College Park: Institute of System Research, University of Maryland, 1994.

[8] Peter Marbach, John N Tsitsiklis. Simulation-based optimization of Markov reward processes[R]. Technical Report LIDS-P-2411. Massachusetts Institute of Technology, 1998.

下 期 要 目

多智能体技术应用综述	刘金琨 尔联浩
多层递阶方法理论与应用的进展	韩志刚
基于 Agent 的集散递阶智能控制的研究	王俊普 等
不确定离散时间系统的 H_2/H_∞ 最优保性能控制	俞立 等
两类特殊故障源作用下函数元系统的可靠性评估	邓北星 等
基于高级 Petri 网的 BPR 建模与仿真	乔非 等
具有时变时滞的线性大系统的稳定条件	张志飞 卓兢
BP 网络改进算法的性能对比研究	高雪鹏 丛爽
基于 LMI 方法的机器人 LPV 鲁棒 H_∞ 控制器设计	虞忠伟 等
电梯群控制系统的交通模式识别	宗群 等
电力系统有限时间励磁控制	王玉振 等