文章编号: 1001-0920(2001)02-0186-05

H_∞控制理论在纳什均衡动态对策问题中的应用研究

钟麦英[1], 汤兵勇[1], 黄小原[2]
(1. 东华大学 工商管理学院, 上海 200051; 2. 东北大学 工商管理学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘　要: 在 l_2 范数有界不确定性扰动影响情况下, 把 N 人线性二次纳什对策问题归结为由非合作、非零和线性二次动态对策及二人零和动态对策组成的复合对策问题; 基于纳什均衡对策理论和 H_∞控制理论方法, 给出并证明了不确定环境下纳什对策问题状态反馈解存在的条件及其求解方法; 通过一个政府债务稳定问题简例, 说明了算法的有效性。

关键词: l_2 范数有界; 不确定性; 纳什均衡; 二人零和动态对策; H_∞控制
中图分类号: TP 271　　文献标识码: A

Application Research of H_∞ Control Theory in Nash Equilibrium Dynamic Game Problem

ZHONG Mai-ying[1], *TANG Bing-yong*[1], *HUANG Xiao-yuan*[2]
(1. College of Business Administration, East China University, Shanghai 200051, China;
2. College of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: The N-person linear quadratic Nash dynamic game with l_2 norm bounded uncertainty is considered as a compound dynamic game, which is composed of non-cooperative non-zero sum linear quadratic dynamic game and two-person zero sum dynamic games. Based on Nash dynamic game theory and H_∞ control theory approach, the existence conditions and designing method of state feedback solution are presented and proved. Finally, an example about government debt stabling problem illustrated the validation of this algorithm.

Key words: l_2 norm bounded; uncertainty; Nash equilibrium; two-person zero sum dynamic game; H_∞ control

1 引　　言

许多经济现象和经济行为都被经济学家理解为某种对策问题。对策论在许多经济学科得到接受和运用, 几乎贯穿了整个微观经济学, 并已扩展到宏观经济学、产业组织理论等, 在环境、劳动、福利经济学等研究中也占有重要地位。1994年纳什(Nash)、海萨尼(Harsanyi)和塞尔顿(Selton)因长期在对策论理论、应用研究及实践方面所做的贡献而获得诺贝尔经济学奖[1,2]。

对策论在经济学科所取得的成果主要表现在确定性系统和统计特性已知的随机系统, 对于受到不

收稿日期: 2000-01-10; 修回日期: 2000-04-03
作者简介: 钟麦英(1965—), 女, 山东博兴人, 副研究员, 博士后, 从事鲁棒 H_∞控制及其应用等研究; 黄小原(1947—), 男, 辽宁沈阳人, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制理论和智能控制等研究。

确定扰动冲击影响的 N 人非合作对策问题的研究则很不充分。本文应用 H_∞ 控制理论方法, 研究系统受到 l_2 范数有界不确定性扰动情况下, 如何求得对策问题的纳什均衡解。

2 问题描述

考虑由方程

$$x_{k+1} = Ax_k + \sum_{i=1}^{N} B_i u_{ik}, \quad k = 1,2,\cdots,T \tag{1}$$

和损失函数

$$J_i = \frac{1}{2}\Big(x_k^{\mathrm T} Q_i x_k + u_{ik}^{\mathrm T} R_{ii} u_{ik} + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} u_{jk}^{\mathrm T} R_{ij} u_{jk}\Big), \quad i = 1,2,\cdots,N \tag{2}$$

描述的离散时间 N 人线性二次动态对策问题[3]。其中, $x_k \in R^n$ 为状态向量, J_i 为对策方 i 的损失函数, $u_{ik} \in R^{m_i}$ 为对策方 i 可采取的策略, A, B_i, Q_i, R_{ij} 是相应维数的系数矩阵, 且满足 $Q_i \geq 0, R_{ij} \geq 0 (i \neq j), R_{ii} > 0$。

在无记忆完全状态信息模式假设条件下, 当且仅当存在策略 $(u_1^*, \cdots, u_N^*)$ 使如下不等式组

$$\begin{cases} J_1^* = J_1(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_N^*) \leq \\ \qquad J_1(u_1, u_2^*, \cdots, u_N^*) \\ J_2^* = J_2(u_1^*, u_2^*, u_3^*, \cdots, u_N^*) \leq \\ \qquad J_2(u_1^*, u_2, u_3^*, \cdots, u_N^*) \\ \qquad \vdots \\ J_N^* = J_N(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_N^*) \leq \\ \qquad J_N(u_1, u_2^*, \cdots, u_{N-1}^*, u_N) \end{cases} \tag{3}$$

成立时, 则称 $(u_1^*, \cdots, u_N^*)$ 为该对策问题的纳什均衡解, 其中 $u_i^* = \{u_{i,1}^*(x_1), \cdots, u_{i,T}^*(x_T)\}$ 称为对策方 i 的纳什均衡策略集[3]。

进一步考虑系统受到外部干扰 $w_k \in R^r$ 的情形。不失一般性, 设 w_k 属于 l_2 范数有界集, 即 $w_k \in l_2(0, T; R^r)$, 则系统方程为

$$x_{k+1} = Ax_k + \sum_{i=1}^{N} B_i u_{ik} + Ew_k \\ k = 1,2,\cdots,T \tag{4}$$

由于系统受到不确定性扰动 w_k 的影响, 因此在原均衡点 $(u_1^*, \cdots, u_N^*)$ 处, 不等式(3) 不再成立, 或者说原纳什均衡将被打破。在此情况下, 对于对策方 i 而言, 很难求得使 J_i 最小的策略。在决定自己的行为时, 既要考虑其它对策方的行为策略 u_j^* $(j \neq i)$, 还要考虑扰动 w_k 的影响。为此, 引入表示干扰抑制水平的标量 $\gamma_i > 0$, 并求状态反馈策略 $u_{ik} = u_{ik}^*(x_k)$, 使满足

$$\sum_{k=0}^{T}\Big[x_k^{\mathrm T} Q_i x_k + \sum_{j=1}^{N} u_{jk}^{\mathrm T} R_{ij} u_{jk}\Big] \leq \gamma_i^2 \sum_{k=0}^{T} w_k^{\mathrm T} w_k \tag{5}$$

的 γ_i 达到最小。显然 γ_i 越小, 不等式(5) 左端也越小, 对应的策略将把扰动的影响抑制在允许的水准以下。称该问题为线性二次纳什均衡 H_∞ 扰动衰减问题, 简称 LQNH_∞ 扰动衰减问题[4], $u_{ik} = u_{ik}^*(x_k)$ 为 LQNH_∞ 扰动衰减状态反馈策略, 对应的 $\gamma_i > 0$ 为其扰动衰减水平。这样便形成了 N 个对策方之间的非合作线性二次对策, 而各对策方 i 与扰动 w_k 则构成二人零和线性二次动态对策。现在要解决的问题是求 $(u_1^*, \cdots, u_N^*)$, 使得

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{T}\Big[x_k^{\mathrm T} Q_1 x_k + \sum_{j=1}^{N} u_{jk}^{*\mathrm T} R_{1j} u_{jk}^*\Big] \leq \gamma_1^2 \sum_{k=0}^{T} w_k^{\mathrm T} w_k \\ \sum_{k=0}^{T}\Big[x_k^{\mathrm T} Q_2 x_k + \sum_{j=1}^{N} u_{jk}^{\mathrm T} R_{2j} u_{jk}\Big] \leq \gamma_2^2 \sum_{k=0}^{T} w_k^{\mathrm T} w_k \\ \qquad \vdots \\ \sum_{k=0}^{T}\Big[x_k^{\mathrm T} Q_N x_k + \sum_{j=1}^{N} u_{jk}^{\mathrm T} R_{Nj} u_{jk}\Big] \leq \gamma_N^2 \sum_{k=0}^{T} w_k^{\mathrm T} w_k \end{cases} \tag{6}$$

成立。下面应用 H_∞ 控制理论方法给出问题的解。

3 线性二次纳什问题的 $\boldsymbol{H_\infty}$ 状态反馈策略

给定 $\gamma_i > 0$, 对于 LQNH_∞ 扰动衰减问题(4) 和 (5), 定义性能指标函数

$$J_i(u_1, u_2, \cdots, u_N, w) = \\ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{T}\Big[\Big(x_k^{\mathrm T} Q_i x_k + \sum_{j=1}^{N} u_{jk}^{\mathrm T} R_{ij} u_{jk}\Big) - \gamma_i^2 w_k^{\mathrm T} w_k\Big] \\ i = 1,2,\cdots,N \tag{7}$$

则该问题等价于求状态反馈策略 $(u_{1k}^*(x_k), u_{2k}^*(x_k), \cdots, u_{Nk}^*(x_k))$, 使对于任意 $w_k \in l_2(0, N; R^r)$, 满足 $J_i(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_N^*, w) \leq 0$。从动态对策的观点讲, 对策的一方 i 求 u_{ik}^* 使在其余对策方的策略为 $u_{jk}^*(x_k) (j \neq i)$ 的情况下, 满足

$$J_i(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_N^*, w) \leq \\ J_i(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_N^*, w_i^*) \leq \\ J_i(u_1^*, \cdots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \cdots, u_N^*, w_i^*) \\ \forall w \in l_2(0, T; R^r) \\ i = 1,2,\cdots,N, \quad k = 1,2,\cdots,T$$

其中 $u_i^* = \{u_{i,1}^*(x_1), \cdots, u_{i,T}^*(x_T)\}$ 为控制策略集, $w_i^* = \{w_{i,1}^*(x_1), \cdots, w_{i,T}^*(x_T)\}$ 为对策方 i 所对应的"最差"扰动信号集, 即 w_{ik}^* 为 k 时刻使 J_i 取最大值

时的扰动信号。

首先考虑对策方 i 与扰动 w_k 构成的二人零和线性二次动态对策问题:

定理 1 对于由方程(4)和性能指标

$$J_i=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{T}\left[\left(x_k^{\mathrm{T}}Q_ix_k+\sum_{j=1}^{N}u_{jk}^{\mathrm{T}}R_{ij}u_{jk}\right)-\gamma_i^2w_k^{\mathrm{T}}w_k\right]$$

描述的二人零和动态对策问题,当且仅当存在非负矩阵序列 $P_{i,k}$,满足

$$\begin{cases}R_{ii}+B_i^{\mathrm{T}}P_{i,k+1}B_i>0\\ I-\gamma_i^{-2}E^{\mathrm{T}}P_{i,k+1}E>0\end{cases},\quad k=1,2,\cdots,T \tag{8}$$

时,存在唯一状态反馈鞍点解

$$\begin{cases}u_{i,k}^*=-B_i^{\mathrm{T}}P_{i,k+1}[I+(B_iB_i^{\mathrm{T}}-\\ \qquad\gamma^{-2}EE^{\mathrm{T}})P_{i,k+1}]^{-1}\left(A+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}B_jF_j\right)x_k\\ w_{i,k}^*=E^{\mathrm{T}}P_{i,k+1}[I+(B_iB_i^{\mathrm{T}}-\\ \qquad\gamma^{-2}EE^{\mathrm{T}})P_{i,k+1}]^{-1}\left(A+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}B_jF_j\right)x_k\end{cases} \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned}P_{i,k}={}&Q_i+F_{j,k}^{\mathrm{T}}R_{ij}F_{j,k}+(A+\\&B_jF_{j,k})^{\mathrm{T}}P_{i,k+1}[I+(B_iB_i^{\mathrm{T}}-\\&\gamma^{-2}EE^{\mathrm{T}})P_{i,k+1}]^{-1}(A+B_jF_{j,k})\end{aligned}$$

$$P_{i,N+1}=0,\quad u_{j,k}^*(x_k)=F_{j,k}x_k,\quad j\neq i$$

且在鞍点处有 $J_i^*=\dfrac{1}{2}x_0^{\mathrm{T}}P_{i,0}x_0$。

证明参见文献[4～6]。

根据上述定理,对于 LQNH_∞ 扰动衰减问题可得如下结论:

定理 2 给定 $\gamma_i>0$,当且仅当存在非负矩阵序列 $P_{i,k}$,满足

$$\begin{cases}R_{ii}+B_i^{\mathrm{T}}P_{i,k+1}B_i>0\\ I-\gamma_i^{-2}E^{\mathrm{T}}P_{i,k+1}E>0\end{cases},\quad k=1,2,\cdots,T \tag{10}$$

时,系统(4)存在唯一状态反馈解 $u_{ik}^*(x_k)=F_{i,k}x_k$,使对于 $\forall w_k\in l_2(0,T;R^r)$ 满足目标(6)。其中

$$\begin{bmatrix}F_{1,k}\\F_{2,k}\\\vdots\\F_{N,k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1&\Delta_{1,k}B_2&\cdots&\cdots&\Delta_{1,k}B_N\\\Delta_{2,k}B_1&I_2&\Delta_{2,k}B_3&\cdots&\Delta_{2,k}B_N\\\vdots&&&&\vdots\\\Delta_{N,k}B_1&\Delta_{N,k}B_2&\cdots&\cdots&I_N\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\bar F_{1,k}\\\bar F_{2,k}\\\vdots\\\bar F_{N,k}\end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\bar F_{i,k}=-\Delta_{i,k}A$$

$$\begin{aligned}\Delta_{i,k}={}&R_{ii}^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P_{i,k+1}[I+\\&(B_iR_{ii}^{-1}B_i^{\mathrm{T}}-\gamma_i^{-2}EE^{\mathrm{T}})P_{i,k+1}]^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{i,k}={}&Q_i+F_{i,k}^{\mathrm{T}}R_{ij}F_{ik}+\\&\left(A+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}B_jF_{j,k}\right)^{\mathrm{T}}P_{i,k+1}[I+(B_iB_i^{\mathrm{T}}-\\&\gamma_i^2EE^{\mathrm{T}})P_{i,k+1}]^{-1}\left(A+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}B_jF_{j,k}\right)\end{aligned}$$

$$P_{i,N+1}=0,\quad i=1,2,\cdots,N \tag{12}$$

I_r 和 I_i 分别表示 r 维和 m_i 维单位矩阵。

证明 由定理1可知,如果 $u_{jk}^*(x_k)=F_jx_k(j\neq i)$,则在零初始条件下,对于由对策方 i 和扰动 w_k 构成的二人零和线性二次动态对策问题,当且仅当存在矩阵序列 $P_{i,k}$ 满足条件(8)和式(12)时,存在式(9)的唯一鞍点解,满足

$$J_i=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{T}\left[\left(x_k^{\mathrm{T}}Q_ix_k+\sum_{j=1}^{N}u_{jk}^{*\mathrm{T}}R_{ij}u_{jk}^*\right)-\gamma_i^2w_{i,k}^{*\mathrm{T}}w_{i,k}^*\right]=0 \tag{13}$$

将式(9)代入(13),经适当整理,即得式(12)。(证毕)

对于 $N=2$ 的特殊情况,有如下结论:

推论 1 给定 $\gamma_1>0$ 和 $\gamma_2>0$,当且仅当存在序列 P_{1k} 和 P_{2k},同时满足 $R_{ii}+B_i^{\mathrm{T}}P_{ik+1}B_i>0$, $I_r-\gamma_i^{-2}E^{\mathrm{T}}P_{ik+1}E>0(i=1,2)$,且 $\begin{bmatrix}I_1&\Delta_{1k}B_2\\\Delta_{2k}B_1&I_2\end{bmatrix}$ 可逆时,则存在唯一解 $u_{1k}^*(x_k)=F_{1,k}x_k$, $u_{2k}^*(x_k)=F_{2,k}x_k$,使得

$$\sum_{k=0}^{T}\left[x_k^{\mathrm{T}}Q_ix_k+\sum_{j=1}^{2}u_{jk}^{\mathrm{T}}R_{ij}u_{jk}\right]\leq\gamma_i^2\sum_{k=0}^{T}w_k^{\mathrm{T}}w_k$$

$$i=1,2,\quad\forall w_k\in l_2(0,T;R^r)$$

其中 I_r, I_1, I_2 分别为 r, m_1 和 m_2 维单位矩阵,且

$$\begin{aligned}P_{1,k}={}&Q_1+F_{2,k}^{\mathrm{T}}R_{12}F_{2,k}+\\&(A+B_2F_{2,k})^{\mathrm{T}}P_{1,k+1}(I+(B_1B_1^{\mathrm{T}}-\\&\gamma_1^{-2}EE^{\mathrm{T}})P_{1,k+1})^{-1}(A+B_2F_{2,k})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{2,k}={}&Q_2+F_{1,k}^{\mathrm{T}}R_{21}F_{1,k}+\\&(A+B_1F_{1,k})^{\mathrm{T}}P_{2,k+1}(I+(B_2B_2^{\mathrm{T}}-\\&\gamma_2^{-2}EE^{\mathrm{T}})P_{2,k+1})^{-1}(A+B_1F_{1,k})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{1,k}={}&(I_1-\Delta_{1,k}B_2\Delta_{2,k}B_1)^{-1}\times\\&(\bar F_{1,k}-\Delta_{1,k}B_2\bar F_{2,k})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{2,k}={}&(I_2-\Delta_{2,k}B_1\Delta_{1,k}B_2)^{-1}\times\\&(\bar F_2-\Delta_{2,k}B_1\bar F_{1,k})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1k}={}&R_{11}^{-1}B_1^{\mathrm{T}}P_{1,k+1}[I+\\&(B_1R_{11}^{-1}B_1^{\mathrm{T}}-\gamma_1^{-2}EE^{\mathrm{T}})P_{1,k+1}]^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{2k}={}&R_{22}^{-1}B_2^{\mathrm{T}}P_{2,k+1}[I+\\&(B_2R_{22}^{-1}B_2^{\mathrm{T}}-\gamma_2^{-2}EE^{\mathrm{T}})P_{2,k+1}]^{-1}\end{aligned}$$

$$\bar F_{1,K}=-\Delta_{1,k}A,\quad\bar F_{2,K}=-\Delta_{2,k}A$$

$$P_{1,N+1} = 0, \quad P_{2,N+1} = 0 \tag{16}$$

证明略。

另外, 关于闭环系统的渐近稳定性, 如果存在使 (A, B_i) 能控(或可稳), $(A, Q_i^{1/2})$ 可测的 B_i 和 $Q_i > 0$, 则闭环系统的稳定性可以保证, 这与一般线性定常系统 H_∞ 状态反馈控制器设计中闭环系统稳定性的证明相似, 在此不做进一步讨论。

4 简　　例

文献[7] 给出一个关于政府债务稳定的微分对策简例。这里将该例进行离散化处理, 设第 k 年政府债务为 d_k, 政府财政赤字为 f_k, 中央银行的货币发行量为 m_k, 则第 $k+1$ 年的债务量为

$$d_{k+1} = (1+r)d_k + f_k - m_k$$

其中, d_k, f_k 和 m_k 分别表示占 GDP 的比例, r 为债务利息与产出增长率之差。进一步考虑系统受到不确定性干扰的情况, 即债务变化方程为

$$d_{k+1} = (1+r)d_k + f_k - m_k + ew_k$$

其中 w_k 为不确定性噪声扰动信号, 不失一般性, 设 $\sum_{k=0}^{T} |w_k|^2 < \infty$(任意正整数 T)。

假设财政和货币政策分别由财政主管部门和中央银行决策, 并且其目标函数各不相同。财政赤字决策的原则是使如下目标函数最小化, 即

$$\min_{f_k}\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{T}\left[(f_k-\bar f)^2 + \eta(m_k-\bar m)^2 + \lambda(d_k-\bar d)^2\right]e^{-\delta k\Delta T}\right\} \tag{14}$$

中央银行货币发行的准则是货币的增长使如下损失函数最小, 即

$$\min_{f_k}\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{T}\left[(m_k-\bar m)^2 + \kappa(d_k-\bar d)^2\right]e^{-\delta k\Delta T}\right\} \tag{15}$$

其中, $\bar f$, $\bar m$ 和 $\bar d$ 分别为财政赤字、货币发行量和政府债务的目标值, λ, η 和 κ 均为加权系数, δ 为贴现因子, ΔT 取为 1 年。

由于不确定性扰动 w_k 的冲击影响, 对策双方 f_k 和 m_k 均不可能求得使目标(14) 和(15) 最小的策略。基于 H_∞ 控制的基本思想, 引入表示扰动衰减水平的常数 $\gamma_1 > 0$ 和 $\gamma_2 > 0$, 求策略 f_k 和 m_k, 使同时满足

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{T}\left[(f_k-\bar f)^2 + \eta(m_k-\bar m)^2 + \lambda(d_k-\bar d)^2\right]e^{-\delta k\Delta T} \le \frac{1}{2}\gamma_1^2\sum_{k=0}^{T}w_k^2$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{T}\left[(m_k-\bar m)^2 + \kappa(d_k-\bar d)^2\right]e^{-\delta k\Delta T} \le \frac{1}{2}\gamma_2^2\sum_{k=0}^{T}w_k^2 \tag{17}$$

的 γ_1 和 γ_2 越小越好。显然, γ_1 和 γ_2 越小, 两目标值越小。引入状态变量 $x_k = [x_{1,k} \quad x_{2,k}]^{\mathrm T}$, 其中

$$x_{1,k} = (d_k - \bar d)e^{-(1/2)\delta k\Delta T}$$

$$x_{2,k} = (r\bar d + \bar f - \bar m)e^{-(1/2)\delta k\Delta T}$$

控制变量

$$u_{1,k} = (f_k - \bar f)e^{-(1/2)\delta k\Delta T}$$

$$u_{2,k} = (m_k - \bar m)e^{-(1/2)\delta k\Delta T}$$

建立系统的状态空间方程

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1+r-\frac{1}{2}\delta & 1 \\ 0 & 1+r-\frac{1}{2}\delta \end{bmatrix}x_k + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u_{1,k} + \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}u_{2,k} + ew_k \tag{18}$$

控制 u_1 的目标为求得策略 $u_{1,k}(k = 0, 1, \cdots, T)$, 使其满足

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{T}\left[x_k^{\mathrm T}Q_1x_k + u_{1k}^2\right] \le \frac{1}{2}\gamma_1^2\sum_{k=0}^{T}w_k^2 \tag{19}$$

控制 u_2 的目标为求得策略 $u_{2,k}(k = 0, 1, \cdots, T)$, 使其满足

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{T}\left[x_k^{\mathrm T}Q_2x_k + u_{2k}^2\right] \le \frac{1}{2}\gamma_2^2\sum_{k=0}^{T}w_k^2 \tag{20}$$

其中

$$Q_1 = \begin{bmatrix}\kappa & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix}\lambda & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

本例中取 $r = 3\%$, $\lambda = 0.98$, $\delta = 0.05$, $\kappa = 0.7$, $e = 0.15$。时间区间为 $T = 100$, ΔT 为 1 年。仿真计算得 γ_1 的最小值 $\gamma_{1,\min} < 0.18$, γ_2 的最小值 $\gamma_{2,\min} < 0.215$。对于不同的 γ_1 和 γ_2 取值, 控制策略求解结果分别如下:

1) 当 $\gamma_1 = 0.19$, $\gamma_2 = 0.22$ 时, 存在满足推论 1 中条件的矩阵序列 $P_{1,k}$ 和 $P_{2,k}$, 以及对应的策略 u_{1k} 和 u_{2k}, 即

$$P_{1,0} = \begin{bmatrix}1 & -9\\-9 & 42\,150\end{bmatrix}, \quad P_{2,0} = \begin{bmatrix}2 & 61\\61 & 43\,312\end{bmatrix}$$

$$u_{10} = -[0.108\,9 \quad 40.938\,9]x_0$$

$$u_{20} = [0.796\,1 \quad 68.143\,7]x_0$$

$$P_{1,1} = \begin{bmatrix}1 & -8\\-8 & 41\,056\end{bmatrix}, \quad P_{2,1} = \begin{bmatrix}2 & 60\\60 & 42\,215\end{bmatrix}$$

$u_{11} = -[0.1089 \quad 40.9389]x_1$

$u_{21} = [0.7961 \quad 68.1437]x_1$

$\vdots$

$$P_{1,99} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{2,99} = \begin{bmatrix} 0.98 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$u_{1,99} = 0, \quad P_{1,100} = P_{2,100} = 0, \quad u_{2,99} = 0$

2) 当$\gamma_1 = 0.6, \gamma_2 = 0.2117$时, 存在正定阵$P_1$和$P_2$满足条件, 状态反馈策略为$u_{1k} = [-0.0009 \quad 2.4367]x_k$, $u_{2k} = [1.0028 \quad 6.7580]x_k$, P_1和P_2分别为

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.0053 \\ -0.0053 & 281.0258 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1.9869 & 6.7856 \\ 6.7856 & 494.7738 \end{bmatrix}$$

3) 当不考虑系统的外部扰动时, 应用文献[3]关于线性二次纳什均衡解的定理, 计算得纳什均衡策略为

$$u_{1k} = -[0.2766 \quad 0.2765]x_k$$

$$u_{2k} = [0.4086 \quad 0.5897]x_k$$

相应闭环系统的扰动衰减水平为$\gamma_1 = 0.20$, $\gamma_2 = 0.24$。

从以上仿真计算结果可以看出: 当系统受到不确定性扰动影响时, 对于不同的扰动衰减水平γ_1和γ_2, 应用H_∞控制方法求得的纳什均衡解不同; 基于H_∞理论方法求得的LQNH_∞策略, 比以确定模型求得的纳什均衡策略可获得更好的扰动衰减效果(如上述结果1)和3))。

5 结 语

本文应用离散时间H_∞控制理论方法, 以二人线性二次纳什均衡问题为例, 研究了具有l_2范数有界不确定性扰动纳什均衡问题的H_∞扰动衰减策略, 给出并证明了其状态反馈解存在的条件。计算实例说明了算法的有效性。

参考文献:

[1] 王宏昌. 诺贝尔经济学奖获得者演讲集[M]. 北京: 中国社会科学出版社, 1997.

[2] 黄小原. 计算经济学的进展——兼评诺贝尔经济学奖理论中计算思想和作用[J]. 科技导报, 1998, 10(124): 59-62.

[3] Basar T, Olsder J. Dynamic noncooperative game theory[M]. New York: Academic Press, 1982.

[4] Caravani P. On H_∞ criteria for macroeconomic policy evaluation [J]. J of Economic Dynamics and Control, 1995, 19(5-7): 961-984.

[5] Yaesh I, Shaked U. Minimum H_∞-norm regulation of linear discrete-time systems and its relation to linear quadratic discrete games[A]. Proc of the 28th Conf on Decision and Control[C]. Tampa, 1989. 942-947.

[6] Ball I A, Helton J W. H_∞ optimal control for nonlinear plants: Connection with differential games[A]. Proc of the 28th Conf on Decision and Control[C]. Tampa, 1989. 956-962.

[7] Engwerda J C. On the open-loop Nash equilibrium in LQ-games[J]. J of Economic Dynamics and Cotnrol, 1998, 22(3): 729-762.

下 期 要 目