

文章编号: 1001-0920(2001)02-0207-04

约束非线性系统的滑模预测控制方法

周建锁, 刘志远, 裴 润

(哈尔滨工业大学 控制科学与工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘 要: 将预测控制和滑模控制结合起来, 提出一种新的非线性模型预测控制方法。通过对系统状态预测得到切换函数预测值, 求解约束开环优化求得预测控制律, 并将当前时刻的控制作用于对象, 下一时刻重复此过程。该方法具有预测控制在线处理约束及滑模控制滑动模态对干扰的不变性的优点。分析了零终端滑模约束模型预测控制的稳定性。

关键词: 非线性模型预测控制; 滑模控制; 约束优化

中图分类号: TP 273 **文献标识码:** A

Sliding Mode Predictive Control Scheme for Constrained Nonlinear Systems

ZHOU Jian-suo, LIU Zhi-yuan, PEI Run

(Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: A new nonlinear model predictive control (NLMPC) scheme is proposed, which combines the predictive control and the sliding mode control (SMC). By predicting the system state, the pre-designed switching function is predicted, then the control law can be found by solving constrained open-loop optimal control problem. The current control is implemented, and then the optimizing procedure is repeated at the next sampling time. The proposed scheme, which has advantages of NLMPC and SMC, can deal with system constraints on-line and has strong robustness on the sliding surface. By constraining terminal sliding mode to be zero, the stability of MPC system is analyzed.

Key words: nonlinear model predictive control; sliding mode control; constrained optimization

1 引 言

模型预测控制以其很强的处理系统非线性和输入约束及状态约束的能力而受到人们的关注。由于预测控制采用滚动优化的方法, 使得系统的稳定性和鲁棒性分析非常困难^[1]。Rawlings 等给出的 MPC 方案附加终端等式约束, 强迫不稳定模态在控制时域末端等于零^[2]; Mayne 等通过对终端状态施加等

式约束, 证明了 MPC 能镇定一类受约束的非线性系统^[3]; Michalska 等将终端等式约束放松为不等式约束, 提出一种双模控制方案, 即在终端吸引区外采用预测控制器, 在内部采用线性状态反馈控制器^[4,5]; Chen 等提出一个准无限时域预测控制方案, 优化问题有附加的终端代价项和终端约束条件, 从而将预测时域延伸至准无限, 如果在最初时刻优化问题有解, 则能保证闭环系统的稳定性^[6,7]。

收稿日期: 2000-01-24; 修回日期: 2000-07-11

基金项目: 黑龙江省博士后科研启动基金项目

作者简介: 周建锁(1973—), 男, 河北宽城人, 博士生, 从事非线性预测控制等研究; 裴润(1939—), 男, 北京人, 教授, 博士生导师, 从事机器人控制等研究。

滑模控制的优点是滑动模态对系统摄动具有完全自适应性,并将高维复杂系统的运动变为两个低维的运动^[8],但是滑模控制不能处理系统控制约束和状态约束。为此,本文将非线性模型预测控制与滑模控制结合起来,首先设计出切换函数,使得滑动模态渐近稳定;然后在有限预测时域的基础上对切换函数附加终端等式约束,使切换函数终端等于零;最后给出了预测控制系统的稳定性分析。所提出的方法具有预测控制处理约束和滑模控制中滑动模态对干扰的不变性的优点。

2 非线性模型预测控制的一般形式

对于约束非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & x(0) = x_0 \\ x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n, & u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (1)$$

其离散形式可写成

$$\begin{cases} x(k+1) = f_d(x(k), u(k)) \\ f_d(x(k), u(k)) = \\ x(k) + \int_0^\delta f(x(\tau; x(k), k\delta), u(k)) d\tau \end{cases} \quad (2)$$

其中, $x^u(\tau; x(k), k\delta)$ 为系统(1)以 $(x(k), k\delta)$ 为初始状态,在控制 $u(\tau) = u(k), \tau \in [k\delta, (k+1)\delta]$ 作用下的系统轨迹。假定预测时域为 N , 则预测控制问题可描述为

$$P_N(x): \min_{u_N(\bullet)} J_N(x, u) \quad (3a)$$

$$J_N(x, u) = \sum_{i=0}^{N-1} l(x_k(i), u_k(i)) + F(x_k(N)) \quad (3b)$$

且满足如下约束

$$\begin{cases} x_k(i+1) = f_d(x_k(i), u_k(i)) \\ x_k(0) = x(k) \\ u_k(i) \in U, & i \in \{0, 1, \dots, N-1\} \\ x_k(i) \in X, & i \in \{0, 1, \dots, N\} \\ x_k(N) \in W \end{cases} \quad (3c)$$

其中, $u_k(i) = u(k+i|k)$ 和 $x_k(i) = x(k+i|k)$ 分别为 k 时刻的预测控制和状态预测值。对控制集合 U , 状态集合 X , 终端区 W , 函数 $l(\bullet)$ 和 $F(\bullet)$ 有一定的要求^[9,10]。对有限时域预测控制,在 k 时刻求解非线性规划,得到最优预测控制序列 $u_N^*(k) = \{u_k^*(0), u_k^*(1), \dots, u_k^*(N-1)\}$ 。将 $u(k) = u_k^*(0)$ 作用于系统,下一个采样时刻基于新的初始状态 $x(k+1)$ 重复上述过程。

3 非线性滑模预测控制

对于系统(2),设计满足输入约束的 m 个滑模运动方程 $s_i(x) = 0 (i = 1, 2, \dots, m)$ 。采用最终滑动模态 $s(x) = \mathbf{0}, s(x) = [s_1(x) \ s_2(x) \ \dots \ s_m(x)]^T$ 。定义集合 $S = \{x | s(x) = \mathbf{0}\}, S \subset \mathbb{R}^n$, 且有性质: 1) $x \in S$; 2) $s = \mathbf{0}$ 上的滑动运动渐近稳定。由于存在状态约束,在 S 中取满足状态约束的集合 $S^\Delta = \{x \in S | x \in X, u_{eq}(x) \in U\}$, 其中 $u_{eq}(x)$ 为等效控制。

在 k 时刻 $x(k)$ 已知,则切换函数值 $s(k) = s(x(k))$ 。定义控制序列 $u_N(k)$

$$u_N(k) = \{u_k(0), u_k(1), \dots, u_k(N-1)\} \quad (4)$$

在 $u_N(k)$ 作用下,相应的状态预测序列 $x_N(k)$ 和切换函数预测序列 $s_N(k)$ 为

$$\begin{cases} x_N(k) = \{x_k(1), x_k(2), \dots, x_k(N)\} \\ s_N(k) = \{s_k(1), s_k(2), \dots, s_k(N)\} \\ s_k(i) = s(x_k(i)), \quad i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (5)$$

取性能指标为

$$J_N(s, u) = \sum_{i=0}^{N-1} l(s_k(i), u_k(i)) + F(s_k(N)) \quad (6)$$

其中,通常取 $l(a, b) = a^T Q a + b^T R b, Q > 0, R \geq 0; F(\bullet) \geq 0$, 且 $F(\mathbf{0}) = 0$ 。在 k 时刻 $x_k(0) = x(k)$, 则非线性滑模预测控制问题可描述为

$$P_N(x): \min_{u_N(\bullet)} J_N(s, u) \quad (7a)$$

$$\begin{cases} x_k(i+1) = f_d(x_k(i), u_k(i)) \\ i = 0, 1, \dots, N-1 \\ u_k(i) \in U, & i = 0, 1, \dots, N-1 \\ x_k(i) \in X, & i = 0, 1, \dots, N \\ x_k(N) \in S^\Delta \end{cases} \quad (7b)$$

非线性滑模预测控制律为

$$u(k) = \begin{cases} u_k^*(0), & x(k) \notin S^\Delta \\ u_{eq}(x(k)), & x(k) \in S^\Delta \end{cases} \quad (8)$$

现给出非线性滑模预测控制的简要设计步骤如下:

1) 根据 $u(k) \in U$, 设计切换函数 $s(x)$, 并求出 S^Δ 及等效控制 $u_{eq}(x(k))$;

2) 求解式(7a)和(7b),得预测控制律 $u(k) = u_k^*(0)$;

3) 为了抑制干扰和对象的摄动,控制律(8)可写成

$$u(k) = \begin{cases} u_k^*(0), & x(k) \notin S^\Delta \\ u_{eq}(x(k)) - K(s(k)), & x(k) \in S^\Delta \end{cases} \quad (9)$$

其中 $K(s(k))$ 为满足滑模控制系统可达性条件的控制项, 且 $K(0) = 0$.

4 系统稳定性分析

由滑模控制可知, 只需证明滑动模态的可达性便可证明滑模预测控制系统闭环稳定。在 k 时刻求得的最优控制序列为 $u_N^*(k)$, 因此 $u(k) = u_N^*(k)$ 得以实现。此时令性能指标值为 $J_N^*(k)$ 。在下一个采样时刻 $(k + 1)$, 求得预测控制序列 $u_N^*(k + 1)$ 及相应的性能指标值 $J_N^*(k + 1)$ 。在采样时刻 $(k + 1)$, 定义一个控制序列 $u_N(k + 1)$ 为

$$u_N(k + 1) = \{u_{k+1}(0), u_{k+1}(1), \dots, u_{k+1}(N - 2), u_{k+1}(N - 1)\} = \{u_k^*(1), u_k^*(2), \dots, u_k^*(N - 1), u_{k+1}(N - 1)\} \quad (10)$$

其中取 $u_{k+1}(N - 1) = u_{eq}(x_k^*(N)) \in U$, 满足 $x_{k+1}(N) \in S^\Delta$, 即 $s_{k+1}(N) = 0$ 。其相应的状态预测 $x_N(k + 1)$ 和切换函数预测序列 $s_N(k + 1)$ 为

$$\begin{cases} x_N(k + 1) = \{x_{k+1}(1), x_{k+1}(2), \dots, x_{k+1}(N - 1), x_{k+1}(N)\} \\ \{x_k^*(2), x_k^*(3), \dots, x_k^*(N), x_{k+1}(N)\} \\ x_{k+1}(N) \in S^\Delta \end{cases} \quad (11)$$

$$s_N(k + 1) = \{s_{k+1}(1), s_{k+1}(2), \dots, s_{k+1}(N - 1), s_{k+1}(N)\} = \{s_k^*(2), s_k^*(3), \dots, s_k^*(N - 1), 0, 0\} \quad (12)$$

此时性能指标值定义为 $J_N(k + 1)$, 与优化性能指标 $J_N^*(k + 1)$ 相比, 只要优化问题有解, 则有

$$J_N^*(k + 1) \leq J_N(k + 1) \quad (13)$$

如果性能指标 $J_N(\bullet)$ 中对控制量不加权, 即 $l(s, u) = l(s)$, 且 $l(0) = 0$, 则有

$$J_N(k + 1) = \sum_{i=0}^{N-1} l(s_{k+1}(i)) = \sum_{i=0}^{N-2} l(s_k^*(i + 1)) + l(s_{k+1}(N - 1)) = J_N^*(k) - l(s(k)) \quad (14)$$

因此有

$$J_N^*(k + 1) - J_N^*(k) \leq -l(s(k)) \quad (15)$$

$$\begin{cases} J_N^*(k + 1) - J_N^*(k) = 0, & x \in S \\ J_N^*(k + 1) - J_N^*(k) < 0, & x \notin S \end{cases} \quad (16)$$

由式(16)知优化性能指标的值 J_N^* 是非增的。

当 $x \in S$ 时, 由式(15)得

$$\begin{cases} J_N^*(k + 2) - J_N^*(k + 1) \leq -l(s(k + 1)) \\ \vdots \\ J_N^*(k + N) - J_N^*(k + N - 1) \\ \leq -l(s(k + N - 1)) \end{cases} \quad (17)$$

因此有

$$J_N^*(k + N) - J_N^*(k) - \sum_{i=0}^{N-1} l(s(k + i)) \leq -J_N(k) \quad (18)$$

由式(13)知 $J_N^*(k + N) = 0$, 由于 $J_N^*(k + N) = 0$, 易知 $J_N^*(k + N) = 0$, 则有 $s(k + N + i) = 0$ 。因此, 如果初始状态不在滑动面上, 则系统在 $(k + N)$ 时刻能够到达滑动面上。由分析过程可知滑模预测控制的可行性。

定理 1 假定: 1) 性能指标中对控制量不加权; 2) 选择合适的 N , 使得非线性规划 $P_N(x)$ 在初始时刻 k 有解。则: 1) 所设计的非线性滑模预测控制系统是渐近稳定的; 2) 系统至少在当前时刻后的 N 步能到达滑动面上。

证明略。

对于上述结论, 现讨论如下:

1) 切换函数 s 和集合 S^Δ 是离线设计的。有些非线性系统很难设计出满足要求的切换函数, 此时如果令 $S^\Delta = \{0\}$, 且 $s(x) = x$, 则所提出的算法等价于零终端约束的有限时域 NLM PC^[31] 方法。

2) 与双模控制^[41]及准无限时域非线性预测控制^[6,7]相比, 所提出的非线性滑模预测控制不需要将系统在原点进行线性化处理, 可将终端滑动模态集合看作原点的终端吸引区。

3) 与零终端状态相似, 由于 $s_k(N) = 0$, 则终端代价项 $F(s_k(N)) = 0$ 。

5 仿真算例

研究如下无阻尼非线性系统^[17]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u(0.5 + 0.5x_1) \\ \dot{x}_2 = x_1 + u(0.5 - 2.0x_2) \\ -1.0 \leq u \leq 1.0 \\ -1.0 \leq x_1 \leq 1.0 \end{cases}$$

选取切换函数 $s(x) = cx_1^3 + x_2$, $c = 0.2$, 则 $S^\Delta = \{x \mid cx_1^3 + x_2 = 0, -1.0 \leq x_1 \leq 1.0\}$ 。可知当 $x \in S^\Delta$ 时, 等效控制 $u_{eq}(x) \in U, U = \{u \mid -1.0 \leq u \leq 1.0\}$ 。取性能指标

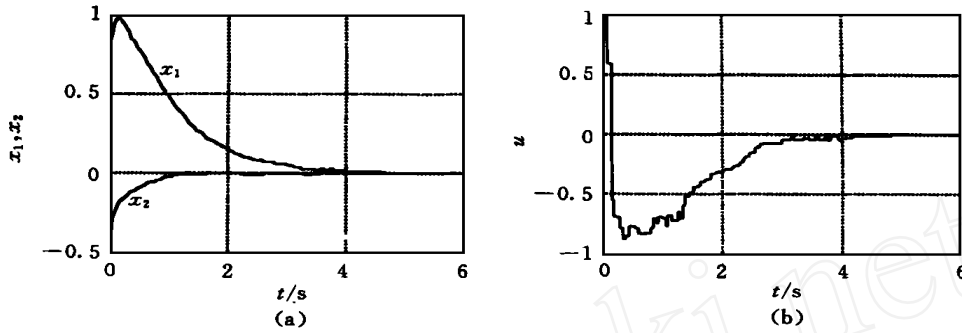


图1 非线性滑模预测控制仿真结果

(a) x_1, x_2 仿真曲线(b) u 仿真曲线

$$J_N(s, u) = \sum_{i=0}^{N-1} \{ s_k^T(i) Q s_k(i) + u_k^T(i) R u_k(i) \}$$

$$Q = 1 \ 0, \quad R = 0 \ 1$$

仿真中, 初始状态

$$(x_1(0), x_2(0)) = (0.8, -0.5)$$

由图1可见, 在满足约束的条件下, 非线性滑模预测控制效果较好。但滑模变结构控制不能保证满足控制约束和状态约束, 如果给变结构控制以饱和和约束, 则系统的响应时间将变慢, 甚至不稳定。滑模预测控制的不光滑是由于非线性规划中的计算和采样步长的选取等原因造成的。

6 结 论

本文提出一种非线性滑模预测控制方法, 它具有非线性模型预测控制实时处理非线性和系统约束的能力, 使得系统简化为两个低维的运动, 且系统在滑动模态上具有较强的鲁棒性。通过在有限预测时域的末端附加等式约束, 使所提出的滑模预测控制闭环稳定。与零终端状态约束相比, 零终端滑模约束条件较为容易实现。仿真实例表明了本文方法的有效性。

参考文献:

[1] 李阳春, 许晓鸣, 杨煜普. 一类非线性预测控制系统的鲁棒稳定性[J]. 自动化学报, 1999, 25(6): 852-855
 [2] Rawlings J B, Muske K R. The stability of constrained

receding horizon control[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1993, 38(10): 1512-1516

- [3] Mayne D Q, Michalska H. Receding horizon control of nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1990, 35(7): 814-824
 [4] David Q M, Hannah M. Robust receding horizon control[A]. Proc of the 20th Conf on Decision and Control [C]. Brighton, 1991. 64-69
 [5] Michalska H, Mayne D Q. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1993, 38(11): 1623-1633
 [6] Chen H. Stability and robustness considerations in nonlinear model predictive control[M]. Düsseldorf: VDI Verlag, 1997. 19-43
 [7] Chen H, Allgöwer F. A quasi-infinite horizon predictive control scheme for constrained nonlinear systems[J]. Control Theory and Application, 1999, 16(3): 313-319
 [8] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1996. 30-49
 [9] Geng X J, Xi Y G. Suboptimality analysis of receding horizon predictive control with terminal constraints[A]. 14th IFAC World Congress[C]. Beijing, 1999. 321-325
 [10] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. Automatica, 2000, 36(6): 789-814