文章编号: 1001-0920(2001)02-0219-04

广义系统状态反馈H∞控制的一个条件

邢　伟[1], 张庆灵[1], 王启义[2], 刘会立[1]
(1. 东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110004; 2. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘　要: 采用状态空间方法, 讨论一类广义系统的基于静态状态反馈的 H_∞控制问题, 得到了该问题满足可解性的一个充分必要条件: 某个基于系统参数阵的广义代数Riccati不等式有满足一个广义约束的解。借助于广义代数Riccati不等式的解, 给出一个所要求的且结构简单的控制器构造。若广义系统满足正交条件, 则所得结论可进一步简化。

关键词: 广义系统; H_∞范数; 广义代数Riccati不等式; 静态状态反馈
中图分类号: TP 13　　**文献标识码**: A

A Condition of State-feedback H∞ Control for Descriptor Systems

XING Wei[1], ZHANG Qing-ling[1], WANG Qi-yi[2], LIU Hui-li[1]
(1. College of Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: With state space approach, static state-feedback based H_∞ control problem for descriptor systems is discussed. A necessary and sufficient condition for the solvability of the problem is obtained in terms of a generalized algebraic Riccati inequality (GARI) with a so-called descriptor constraint. With the aid of a solution to the GARI, a required controller is framed with simpler construction. The criterion of solvability of GARI and the construction of the controller are rather reduced, when the orthogonal condition is satisfied.

Key words: descriptor system; H_∞ norm; generalized algebraic Riccati inequality; static state-feedback

1 引　　言

H_∞控制理论起源于20世纪80年代初期[1]。由于它弥补了控制理论在实际应用中的某些不足, 及其模型本身所具有的广泛适用性, 使其受到人们的普遍重视, 已发展成当今最重要的控制理论分支之一。在近20年的发展历程中, 一般线性系统中的H_∞控制理论已达到较为完善的地步。使用状态空间方法讨论H_∞控制问题, 其特点是方法相对简明, 控制器的结构特征明显, 因而该方法已成为研究H_∞控制问题的主要方法。采用状态空间方法研究H_∞控制问题的结果较多, 例如文献[2～5]讨论了基于状态反馈的H_∞控制问题, 文献[6]则讨论了基于输出反馈的H_∞控制问题。

收稿日期: 1999-10-18; 修回日期: 2000-01-26
基金项目: 辽宁省科学技术基金项目(9810200103)
作者简介: 邢伟(1961—), 男, 辽宁沈阳人, 副教授, 博士, 从事H_∞控制和广义系统中LMI方法等研究; 张庆灵(1956—), 男, 辽宁营口人, 教授, 博士生导师, 从事分散控制大系统和广义系统的鲁棒控制等研究。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

同样具有20年发展历史的广义系统,因其所独有的优势而在控制理论领域中占有重要的地位。在其特有理论发展的同时,一般线性系统理论中的许多概念和结论在广义系统中也都得到了相应发展。关于使用状态空间方法讨论广义系统 H_∞ 控制的问题,最近几年也取得一些较有突破性的进展[7~10]。

本文在状态空间方法的框架下,主要讨论一类基于状态反馈的广义系统 H_∞ 控制问题,得到该问题可解的一个基于广义代数Riccai不等式的判别条件,以及实现所要求的状态反馈控制设计的构造方法。与已有的结果[7~9]相比,本文的条件与结论更为简明。

2　广义系统 H_∞ 控制问题的提出

考虑如下一类广义系统

$$G:\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中,$x(t)\in R^n$ 为系统的状态向量变量,$w(t)\in R^m$ 为系统的干扰输入向量变量,$u(t)\in R^k$ 为系统的控制输入向量变量,$z(t)\in R^q$ 为系统的受控输出向量变量;E 和 A 为实方阵,B_1, B_2, C 和 D 为相应阶数的实矩阵。一般情况下,总假设 $\mathrm{rank}(E) < n$,即 E 是奇异矩阵。

如果关于 s 的特征多项式 $\det(sE - A)\neq 0$,则广义系统(1)或矩阵束 (E,A) 称为正则的。广义系统(1)或矩阵束 (E,A) 的有穷模即为矩阵束 (E,A) 的有穷特征值,而无穷模则为矩阵束 (E,A) 的无穷特征值。若广义系统(1)或矩阵束 (E,A) 的所有有穷模均位于开左半复平面上,则称其是稳定的。对应于秩数大于1的属于矩阵束 (E,A) 的无穷特征值的广义特征向量,其无穷模称为广义系统(1)或矩阵束 (E,A) 的脉冲模。当广义系统(1)或矩阵束 (E,A) 没有脉冲模时,则称其为无脉冲。

定义1　广义系统(1)或矩阵束 (E,A) 称为容许的,如果它是正则的、稳定的且无脉冲。

本文讨论的 H_∞ 控制问题是:对于广义系统(1),寻求一个静态状态反馈控制矩阵 K,使得反馈控制

$$u(t) = Kx(t) \tag{2}$$

能使得到的闭环系统是容许的,且从 w 到 z 的传递函数矩阵

$$T_{zw}(s) := (C + DK)(sE - (A + B_2K))^{-1}B_1 \tag{3}$$

满足 $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$,其中 $\gamma > 0$ 预先给定。该广义系统 H_∞ 控制问题如图1所示。

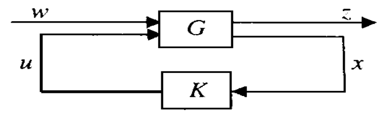

图1　广义系统 H_∞ 控制

引理1　广义系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{4}$$

是容许的,且 $\|C(sE - A)^{-1}B\|_\infty < \gamma$ 的充分必要条件是下列广义代数Riccati不等式

$$A^TX + X^TA + C^TC + \gamma^{-2}X^TBB^TX < 0 \tag{5}$$

有满足广义约束

$$E^TX = X^TE \geq 0 \tag{6}$$

的解 X。

这里称其为"广义约束",是因为该形式的约束是广义系统所特有的[7~10]。

证明参见文献[7]。

3　主要结果

引理2　假设下列矩阵具有适当阶数,且其中的 D 是列满秩的;并设

$$\Phi(X;A,B,C) := A^TX + X^TA + C^TC + \gamma^{-2}X^TBB^TX$$

$$\Psi(X;A,B_1,B_2,C,D) := A^TX + X^TA + C^TC + \gamma^{-2}X^TB_1B_1^TX - (B_2^TX + D^TC)^T(D^TD)^{-1}(B_2^TX + D^TC)$$

则

$$\Phi(X;A + B_2KB_1, C + DK) = \Psi(X;A,B_1,B_2,C,D) + \{D[K + (D^TD)^{-1}(B_2^TX + D^TC)]\}^T \times \{D[K + (D^TD)^{-1}(B_2^TX + D^TC)]\}$$

证明

$$\Phi(X;A + B_2K, B_1, C + DK) = \Phi(X;A,B_1,C) + \Gamma$$

其中

$$\Gamma = K^TB_2^TX + X^TB_2K + C^TDK + K^TD^TC + K^TD^TDK = \{D[K + (D^TD)^{-1}(B_2^TX + D^TC)]\}^T \times \{D[K + (D^TD)^{-1}(B_2^TX + D^TC)]\} - (B_2^TX + D^TC)^T(D^TD)^{-1}(B_2^TX + D^TC)$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

所以有

$$
\begin{aligned}
&\Psi(X;A,B_1,B_2,C,D)=\\
&\Phi(X;A,B_1,C)-(B_2^{T}X+\\
&D^{T}C)^{T}(D^{T}D)^{-1}(B_2^{T}X+D^{T}C)=\\
&\Phi(X;A+B_2K,B_1,C+DK)-\\
&\{D[K+(D^{T}D)^{-1}(B_2^{T}X+D^{T}C)]\}^{T}\times\\
&\{D[K+(D^{T}D)^{-1}(B_2^{T}X+D^{T}C)]\}
\end{aligned}
$$

(证毕)

下面给出本文的主要结果, 并事先假定系统的状态是可利用的。

定理 1　考虑广义系统(1), 假设 $\mathrm{rank}(D)=k$, 则下列叙述是等价的:

1) 对于给定的正数 $\gamma>0$, 广义系统(1) 存在形如式(2) 的静态状态反馈控制器, 使所产生的闭环系统是容许的, 且从 w 到 z 的传递函数矩阵 $T_{zw}(s)$ 满足 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$;

2) 广义代数 Riccati 不等式

$$
\begin{aligned}
&A^{T}X+X^{T}A+C^{T}C+\gamma^{-2}X^{T}B_1B_1^{T}X-\\
&(X^{T}B_2+C^{T}D)(D^{T}D)^{-1}(B_2^{T}X+D^{T}C)<0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

有满足广义约束(6) 的解 X。

当这样的解 X 存在时, 一个所要求的状态反馈控制矩阵为

$$K:=-(D^{T}D)^{-1}(B_2^{T}X+D^{T}C) \tag{8}$$

证明　1) ⇒ 2): 形如式(2) 的状态反馈所产生的闭环系统为

$$
\begin{cases}
E\dot{x}(t)=(A+B_2K)x(t)+B_1w(t)\\
z(t)=(C+DK)x(t)
\end{cases}
\tag{9}
$$

由引理 1, 广义代数 Riccati 不等式

$$\Phi(X;A+B_2K,B_1,C+DK)<0 \tag{10}$$

有满足广义约束(6) 的解 X。再由引理 2, 有

$$
\begin{aligned}
&\Psi(X;A,B_1,B_2,C,D)\le\\
&\Phi(X;A+B_2K,B_1,C+DK)<0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

2) ⇒ 1): 广义代数 Riccati 不等式(7) 有满足广义约束(6) 的解 X, 由引理 2, 如果取反馈控制矩阵

$$K=-(D^{T}D)^{-1}(B_2^{T}X+D^{T}C) \tag{12}$$

则有

$$
\begin{aligned}
&\Phi(X;A+B_2K,B_1,C+DK)=\\
&\Psi(X;A,B_1,B_2,C,D)<0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

而这时的闭环系统恰为式(9)。由引理 1, 该闭环系统是容许的, 且闭环传递函数的 H_∞ 范数严格小于 γ, 即 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$。(证毕)

现将定理 1 与文献[7～9] 中的结果进行比较: [7] 和[8] 的结果是基于动态输出反馈的, 其可解性判别较为复杂, 反馈矩阵的构造方法更加复杂; [9] 讨论了广义系统的有界实引理, 并将其应用于静态状态反馈 H_∞ 控制问题, 讨论的模型仍是系统(1), 但前提条件比本文多, 结果也比本文复杂。本文定理 1 讨论的是基于静态状态反馈的 H_∞ 控制问题, 前提条件要求不多, 可解性判别相对简单, 反馈矩阵的构造容易达到。需要说明的是: 定理1与[7]或[8]的主要结果是相互独立的, 与[9] 的结果也不同。

如果进一步假设系统满足正交条件[6]

$$D^{T}[C\quad D]=[0\quad I] \tag{14}$$

则定理 1 的结论更为简单。

定理 2　对于广义系统(1), 如果 $\mathrm{rank}(D)=k$, 且正交条件(14) 成立, 则下列叙述是等价的:

1) 对于给定的正数 $\gamma>0$, 广义系统(1) 存在形如式(2) 的静态状态反馈控制器, 使所产生的闭环系统是容许的, 且从 w 到 z 的传递函数矩阵 $T_{zw}(s)$ 满足 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$;

2) 广义代数 Riccati 不等式

$$
\begin{aligned}
&A^{T}X+X^{T}A+C^{T}C+\\
&X^{T}(\gamma^{-2}B_1B_1^{T}-B_2B_2^{T})X<0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

有满足广义约束(6) 的解 X。

当这样的解 X 存在时, 一个所要求的状态反馈控制矩阵为 $K:=-B_2^{T}X$。

证明略。

4　结　　论

本文将基于状态反馈的广义系统 H_∞ 控制问题的可解性, 归结为基于系统参数阵的一个广义代数 Riccati 不等式是否存在满足广义约束的解, 并给出一种满足可解性要求的反馈矩阵构造方法。本文结果表明: 无论是可解性的判别还是反馈矩阵的结构, 广义系统基于状态反馈的 H_∞ 控制都比基于输出反馈的 H_∞ 控制简捷明晰, 这是基于状态反馈的优势之一。

参考文献:

[1] Zames G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1981, 26(2): 301-320.

(下转第 225 页)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$s_3 \leq \frac{v}{a}\ln\left(\frac{C_1}{x_1^0}\right) - \Delta \tag{12}$$

显然有 $s_3 \geq s_1$。若使系统的吞吐量达到最大, 则取

$$s_3 = \frac{v}{a}\ln\left(\frac{C_1}{x_1^0}\right) - \Delta \tag{13}$$

4 结 语

本文利用推广的 Petri 网为混合系统建模, 采用对策论方法给出了连续系统的控制器以及离散状态对应的连续状态空间和激发条件。以火车道口为例进行说明, 并根据系统的特点做了改进。在保证系统安全性的基础上, 提高了系统的吞吐率, 满足了系统的多约束条件。

参考文献:

[1] Gino Labniz, M M Bayoumi, K Rudie. Modeling and control of hybrid systems: A survey[A]. Proc of 13th IFAC[C]. San Francisco, 1996. 305-310.

[2] 谢东, 韩曾晋. 基于混合 Petri 网的一类混合系统的动态分析[J]. 控制与决策, 1997, 12(5): 542-547.

[3] 徐心和, 李政国, 李彦平. 一类混合系统的广义 Petri 网模型[J]. 自动化学报, 1997, 23(3): 297-301.

[4] Claire Tomlin, George J Pappas, Shankar Sastry. Conflict resolution for air traffic management: A study in multiagent hybrid systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(4): 509-521.

(上接第 221 页)

[2] Petersen IR. Disturbance attenuation and H^∞ optimization: A design method based on the algebraic Riccati equation[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1987, 32(5): 427-429.

[3] Khargonekar P P, I R Petersen, M A Rotea. H^∞ optimal control with state-feedback[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1988, 33(8): 786-788.

[4] Zhou K, P P Khargonekar. An algebraic equation approach to H^∞ optimization[J]. Syst Contr Lett, 1988, 11(1): 85-91.

[5] Barabanov N E. On the static H_∞ control problem[J]. Syst Contr Lett, 1998, 35(1): 13-18.

[6] Doyle J, K Glover, P P Khargonekar *et al*. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1989, 34(8): 831-847.

[7] Masubuchi I, Y Kamitane, A Ohara *et al*. H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach[J]. Automatica, 1997, 33(4): 669-673.

[8] Wang H S, C F Yung, F R Chang. Bounded real lemma and H_∞ control for descriptor systems[J]. IEE Proc Contr Theory Appl, 1998, 145(3): 316-322.

[9] Gao F, W Q Liu, V Sreeram *et al*. Bound real lemma for descriptor systems and its application[A]. Proc of the 14th World Congress of IFAC[C]. Beijing, 1999. 57-62.

[10] 邢伟, 张庆灵, 王启义, 等. 一个基于状态反馈的广义系统 H_∞ 控制[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2000, 21(1): 107-109.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net