

文章编号: 1001-0920(2001)02-0236-03

混合 μ 控制器设计算法

李 智, 韩崇昭

(西安交通大学 综合自动化研究所, 陕西 西安 710049)

摘要: 在状态空间中, 将基于线性矩阵不等式的内点法应用于混合 μ 控制器的设计, 在此基础上提出了混合 μ 控制器设计的算法。仿真结果表明, 用该算法设计的控制器能使系统达到鲁棒稳定性要求。

关键词: 混合 μ 综合; 严格正实; 内点法; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP 271. 62

文献标识码: A

Algorithm for the Design of the Mixed μ Controller

LI Zhi, HAN Chong-zhao

(Institute of Automation, Xi an Jiaotong University, Xi an 710049, China)

Abstract: Based on interior-point, a state-space algorithm for the design of the mixed μ controller is proposed. This algorithm is illustrated by simulation on the computer. Besides the robust stability, the system designed by the presented method has short regulating period and small overshoot.

Key words: mixed μ synthesis; strictly positive realness; interior-point methods; linear matrix inequalities

1 引 言

混合 μ 综合问题描述为: 寻找使 $M(s)$ 稳定的控制器 K , 且满足

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\Delta}(F_L(M, K)) < 1$$

其中, $M(s)$ 表示广义的标称对象, $\Delta(s)$ 为系统的结构式不确定性矩阵。

文献[1] 将频域中的混合 μ 综合问题转化为时域中的有理函数矩阵 $\tilde{F}_{D, Q}(s)$ 的严格正实问题, 并给出了 $\tilde{F}_{D, Q}(s)$ SPR 的充分条件如下:

定理 1^[1] 如果存在正定矩阵 $P > 0$, 控制矩阵 (A_K, B_K, C_K, D_K) , 对角常数矩阵 $D > 0$ 和 Q 满足矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -\tilde{A}_F^T P - P\tilde{A}_F & -P\tilde{B}_F + (D\tilde{C}_F + Q\tilde{C}_F\tilde{A}_F)^T \\ -\tilde{B}_F^T P + D\tilde{C}_F + Q\tilde{C}_F\tilde{A}_F & D + Q\tilde{C}_F\tilde{B}_F + (D + Q\tilde{C}_F\tilde{B}_F)^T \end{bmatrix} > 0 \quad (1)$$

则 $\tilde{F}_{D, Q}(s)$ SPR, 其中

$$M(s) \sim \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad K(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right]$$

$$A_{F_L} = \left[\begin{array}{cc} A + B_2 D_K C_2 & B_2 C_K \\ B_K C_2 & A_K \end{array} \right]$$

$$B_{F_L} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{F_L} = [C_1 \ 0], \quad D_{F_L} = 0$$

收稿日期: 2000-01-13; 修回日期: 2000-03-02

作者简介: 李智(1961—), 男, 陕西蒲城人, 博士生, 从事鲁棒控制和信息融合等研究; 韩崇昭(1943—), 男, 陕西乾县人, 教授, 博士生导师, 从事随机与自适应控制理论和工业过程控制与稳态优化等研究。

$$\tilde{A}_F = A_{F_L} - B_{F_L} C_{F_L}, \quad \tilde{B}_F = \overline{2} B_{F_L}$$

$$\tilde{C}_F = -\overline{2} C_{F_L}, \quad \tilde{D}_F = I$$

$$\tilde{F}_{D,Q}(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_F & \tilde{B}_F \\ \hline D\tilde{C}_F + Q\tilde{C}_F\tilde{A}_F & D + Q\tilde{C}_F\tilde{B}_F \end{array} \right]$$

显然, μ 控制器 $K(s)$ 可通过求解矩阵不等式 (1) 得到。

2 算 法

在矩阵不等式 (1) 中, 若给定矩阵 P, D, Q , 则式 (1) $F_1(A_K, B_K, C_K, D_K) > 0$ 是关于控制矩阵 (A_K, B_K, C_K, D_K) 的线性矩阵不等式; 若给定控制矩阵 (A_K, B_K, C_K, D_K) , 则式 (1) $F_2(P, D, Q) > 0$ 是关于矩阵 P, D, Q 的线性矩阵不等式。

对固定的矩阵 P, D, Q , 构造关于控制矩阵 (A_K, B_K, C_K, D_K) 的障碍函数

$$\Phi(A_K, B_K, C_K, D_K) = \begin{cases} \log \det F_{\lambda}^{-1}(A_K, B_K, C_K, D_K), \\ F_{\lambda}(A_K, B_K, C_K, D_K) > 0 \\ , \text{ 其它} \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$F_{\lambda}(A_K, B_K, C_K, D_K) = N + F_1(A_K, B_K, C_K, D_K)$$

对固定的矩阵控制矩阵 (A_K, B_K, C_K, D_K) , 构造关于矩阵 P, D, Q 的障碍函数

$$\Phi(P, D, Q) = \begin{cases} \log \det F_{\lambda}^{-1}(P, D, Q), & F_{\lambda}(P, D, Q) > 0 \\ , & \text{其它} \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$F_{\lambda}(P, D, Q) = N + F_2(P, D, Q)$$

基于障碍函数 (2) 和 (3), 应用内点法^[2] 可得混合 μ 控制器 $K(s)$ 设计的状态空间算法如下:

第 1 步: 给定矩阵 $P_0 > 0, D_0, Q_0, \lambda_0, (A_K, B_K, C_K, D_K) = (0, 0, 0, 0)$, 且满足

$$F_{\lambda}(A_K, B_K, C_K, D_K) > 0$$

第 2 步: 固定矩阵 P, D, Q 为常量, 对障碍函数 (2) 应用内点法, 关于控制矩阵 (A_K, B_K, C_K, D_K) 迭代寻优。若 $F_1(A_K, B_K, C_K, D_K) > 0$, 则转第 4 步; 否则, 转第 3 步。

第 3 步: 固定第 2 步中得到的控制矩阵 (A_K, B_K, C_K, D_K) 为常量, 对障碍函数 (3) 应用内点法, 关于矩阵 P, D, Q 迭代寻优。若 $F_2(P, D, Q) > 0$, 则转第 4 步; 否则, 转第 2 步。

第 4 步: 若满足 $F_1(A_K, B_K, C_K, D_K) > 0$ 或

$F_2(P, D, Q) > 0$, 则得控制器 $K(s)$ 。

3 仿 真

现对第 2 节提出的混合 μ 控制器设计的状态空间算法进行仿真。设不确定线性系统的状态空间描述为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ -0.1 + 0.15\delta_1 & -0.02 + 0.3\delta_2 \end{bmatrix} x +$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.25 & 0.75 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

系统的结构式不确定性矩阵 $F = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}$, 满足 $\delta_1 \in [-1, 1], \delta_2 \in [-1, 1]$ 。标称对象为

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -0.5 & 1 & 1 & 1 \\ -0.1 & -0.02 & -0.25 & 0.75 \\ \hline 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ -0.1 & -0.02 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.15 & 0.15 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

仿真结果如下

$$P = \begin{bmatrix} 5.296 & 2.818 & 1.659 & -0.011 \\ 2.818 & 10.296 & 3.675 & 0.005 \\ 1.659 & 3.675 & 20.419 & 3.095 \\ -0.011 & 0.005 & 3.095 & 5.109 \end{bmatrix}$$

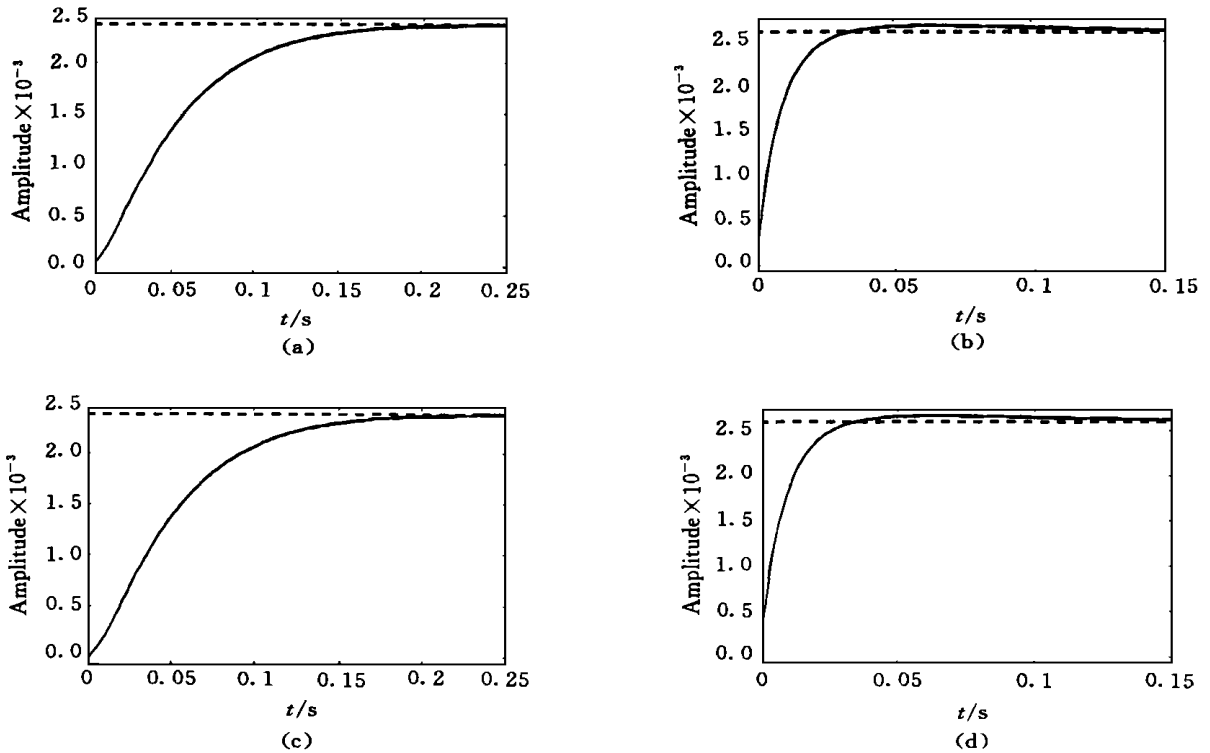
$$D = \begin{bmatrix} 46.106 & 0 \\ 0 & 19.334 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.963 & 0 \\ 0 & 0.664 \end{bmatrix}$$

$$A_K = \begin{bmatrix} -38.059 & 196.861 \\ 4.391 & -631.337 \end{bmatrix}$$

$$B_K = \begin{bmatrix} 228.9 & 12.8 \\ -4404.1 & -23.0 \end{bmatrix}$$

$$C_K = \begin{bmatrix} -14.440 & -1.444 \\ 19.488 & -24.801 \end{bmatrix}$$

图1 加控制器 K 后系统的阶跃响应曲线

(a) 输入 1, 输出 1 (b) 输入 1, 输出 2 (c) 输入 2, 输出 1 (d) 输入 2, 输出 2

$$D_K = \begin{bmatrix} -1849.9 & 142.7 \\ -148.6 & -108.5 \end{bmatrix}$$

未加控制器 K , 当 $F = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 时, 系统的

特征值为 $\lambda_1 = 0.165, \lambda_2 = -0.485$ 。可见当系统中存在不确定性时, 系统会出现不稳定的情况。

加控制器 K 后, 系统的特征值如下:

$$\text{当 } F = \begin{bmatrix} 0.30 & 0 \\ 0 & 0.61 \end{bmatrix} \text{ 时, } \lambda_1 = -635.74, \lambda_{2,3}$$

$$= -25.61 \pm 7.10i, \lambda_4 = -119.82;$$

$$\text{当 } F = \begin{bmatrix} 0.97 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ 时, } \lambda_1 = -635.74, \lambda_{2,3}$$

$$= -25.60 \pm 7.05i, \lambda_4 = -120.31;$$

$$\text{当 } F = \begin{bmatrix} -0.71 & 0 \\ 0 & 0.83 \end{bmatrix} \text{ 时, } \lambda_1 = -635.74, \lambda_{2,3}$$

$$= -25.63 \pm 7.15i, \lambda_4 = -119.70。$$

当 $\delta_1 \in [-1, 1], \delta_2 \in [-1, 1]$ 时, 系统的阶跃响应曲线如图 1 所示。

由仿真结果可以看出, 当系统存在不确定性时, 混合 μ 控制器 $K(s)$ 可保证系统的鲁棒稳定性, 而且其良好的动态性能并没有大的变化。

参考文献:

- [1] 李智, 韩崇昭. 混合 μ 综合的状态空间设计[J]. 西安交通大学学报, 1999, 33(12): 92-95.
- [2] Boyd S. Linear matrix inequalities in system and control theory[J]. The Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994, 17(3): 1-80.