文章编号: 1001-0920(2001)02-0248-03

一类线性切换系统能控性和能达性的充要条件

谢广明, 郑大钟
(清华大学 自动化系, 北京 100084)

摘 要: 给出一类线性切换系统能控性、能达性的充分必要条件, 此类系统的特征是具有相同的系统矩阵和不同的输入矩阵。

关键词: 线性切换系统; 能控性; 能达性
中图分类号: TP 13 **文献标识码**: A

Sufficient and Necessary Condition of Controllability and Reachability of a Class of Linear Switching Systems

XIE Guang-ming, ZHENG Da-zhong
(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The sufficient and necessary condition of controllability and reachability of a class of linear switching systems which has the same systematic matrix and different input matrixes is given.

Key words: linear switching systems; controllability; reachability

1 引 言

混合动态系统(HDS)模型主要用于通讯网络、交通管理、生产制造等日趋复杂的人造系统的描述、分析和控制。目前提出的混合动态系统模型有多种, 如混合自动机模型, 混合 Petri 网模型, 切换系统模型等, 但还没有一个较为统一的模型。切换系统模型可看成变结构系统的一种推广, 很多学者用其分析系统的渐近稳定性。文献[1]利用 Multiple Lyapunov 函数方法给出了判定系统在某一已知切换序列下稳定的充分条件, 这是一个较有代表的结果。

一般说, 切换系统模型具有如下形式

$$\dot{x} = A_{\alpha(t)}x + B_{\alpha(t)}u, \quad y = C_{\alpha(t)}x \tag{1}$$

其中, x 为 n 维状态向量, u 为 p 维输入向量, y 为 q 维输出向量; $\alpha(t): [0, +\infty) \rightarrow \{1, 2, \cdots, N\}$ 为分段常值函数, N 为全部切换模式的总数; A_i, B_i, C_i 均为相应维数的常阵, 一组实现 (A_i, B_i, C_i) 称为一个切换模式。

关于切换系统的研究主要集中于系统稳定性的分析; 而对于系统能控性的研究, 由于难度较大, 结果则很少。文献[2]给出了周期型切换系统在一个周期内能控性和能观性的判定条件。文献[3]严格定义了系统的能控性、能达性和能控集、能达集, 导出了能控性的一个必要条件, 给出了3维单输入双切换系统能控性的充分必要条件。某些控制系统中系统矩阵 A 可能定常, 只有输入矩阵 B 发生切换, 于是可得如下模型

收稿日期: 2000-01-24; **修回日期**: 2000-03-30
基金项目: 国家自然科学基金项目(60074012); 国家973基金项目(1998020305); 攀登计划预研项目(970211017)
作者简介: 谢广明(1972—), 男, 北京人, 博士生, 从事和动态系统和切换系统建模、分析与控制等研究; 郑大钟(1935—), 男, 浙江绍兴人, 教授, 博士生导师, 从事控制理论及应用和系统工程理论及方法等研究。

$$\dot{x} = Ax + B_{\alpha(t)}u, \quad y = C_{\alpha(t)}x \tag{2}$$

系统(2) 是包含于系统(1) 的一种情况, 有一定的实际背景。系统(1) 能控性的充要条件尚未得到, 本文将求得系统(2) 能控性的充分必要条件。

为了便于描述系统的演变过程, 定义切换序列如下:

定义 1(切换序列)　将 $i_m \in \{1, 2, \cdots, N\}$ 表示为切换模式序号, $h_m > 0$ 为切换模式持续时间, 则称 $\{(i_m, h_m)\}_{m=1}^{M} = \{(i_1, h_1), (i_2, h_2), \cdots, (i_M, h_M)\}$ 为一个切换序列, 记为 π。其中 M 表示切换序列的长度。

对于给定的一个切换系统, 当给定初始时刻 t_0 和一个切换序列 π 后, 切换模式的变化过程便完全确定。即在 $\left[t_0 + \sum_{l=1}^{m-1} h_l, t_0 + \sum_{l=1}^{m} h_1\right)$ 内, 切换模式为 (A, B_{i_m}), $\forall m = 1, 2, \cdots, M$。本文只涉及系统的能控性, 因此忽略了输出矩阵 C。

2　主要结果

首先给出系统完全能控和完全能达的定义, 然后仿照文献[3] 的证明思路, 从确定系统的能达集和能控集出发, 给出它们的具体形式。通过对能控集和能达集的研究, 得到有关结论。

定义 2(完全能控性)　对于切换系统(2), 设初始时刻 $t_0 = 0$。如果对任意非零初始状态 x_0, 都存在一个切换序列 π: $\{(i_m, h_m)\}_{m=1}^{M}$ 和一个无约束的容许控制 $u(t)$, 使得状态由初始时刻转移到 $t_f = \sum_{l=1}^{M} h_l$ 时, 有 $x(t_f) = 0$, 则称系统为完全能控。

定义 3(完全能达性)　对于切换系统(2), 设初始时刻 $t_0 = 0$。如果对任意非零状态 x_f, 都存在一个切换序列 π: $\{(i_m, h_m)\}_{m=1}^{M}$ 和一个无约束的容许控制 $u(t)$, 使得状态由初始时刻 $x(0) = 0$ 转移到 $t_f = \sum_{l=1}^{M} h_l$ 时, 有 $x(t_f) = x_f$, 则称系统为完全能达。

另外给出有关列空间和循环不变子空间的定义, 详细描述参见文献[3]。

定义 4(列空间)　矩阵 $B_{n\times K}$ 的列空间为 R^n 中如下定义的一个线性空间

$$R(B) = \{Bx \mid x \in R^K\} \tag{3}$$

定义 5(循环不变子空间)　对矩阵 $A_{n\times n}$ 和 R^n 中线性子空间 W, 称如下的一个线性空间

$$\langle A \mid W\rangle = W + AW + \cdots + A^{n-1}W \tag{4}$$

为子空间 W 经矩阵 A 循环而生成的 A 的不变子空间。

类似于文献[3] 的过程, 构造系统的能达集和能控集。给定一个切换序列 π: $\{(i_m, h_m)\}_{m=1}^{M}$, 由 $x_0 = 0$ 出发的能达状态所构成的集合为

$$\begin{aligned} S_0(\pi) = {} & \exp(Ah_M)\exp(Ah_{M-1})\cdots\exp(Ah_2)\langle A \mid B_{i_1}\rangle + \\ & \exp(Ah_M)\exp(Ah_{M-1})\cdots\exp(Ah_3)\langle A \mid B_{i_2}\rangle + \\ & \cdots + \langle A \mid B_{i_M}\rangle \end{aligned} \tag{5}$$

根据循环不变子空间性质得到

$$S_0(\pi) = \langle A \mid B_{i_1}\rangle + \langle A \mid B_{i_2}\rangle + \cdots + \langle A \mid B_{i_M}\rangle \tag{6}$$

分析式(6) 可知, 能达集与切换序列中持续时间无关, 与切换模式先后次序也无关, 只与系统矩阵和输入矩阵有关。由于输入矩阵个数是有限的, 不难得到如下定理:

定理 1　切换系统(2) 的能达集为

$$S_0 = \langle A \mid B_1\rangle + \langle A \mid B_2\rangle + \cdots + \langle A \mid B_N\rangle \tag{7}$$

证明　易知 $S_0 \supseteq \langle A \mid B_1\rangle + \langle A \mid B_2\rangle + \cdots + \langle A \mid B_N\rangle$。对于任意的切换序列 π, 均有 $S_0(\pi) \subseteq \langle A \mid B_1\rangle + \langle A \mid B_2\rangle + \cdots + \langle A \mid B_N\rangle$。因此

$$S_0 = \bigcup_{\pi} S_0(\pi) \subseteq \langle A \mid B_1\rangle + \langle A \mid B_2\rangle + \cdots + \langle A \mid B_N\rangle$$

由此可知式(7) 成立。

由文献[3] 中能达集与能控集之间的关系, 可知切换序列 π 的能控集为

$$T(\pi) = \langle A \mid B_{i_1}\rangle + \langle A \mid B_{i_2}\rangle + \cdots + \langle A \mid B_{i_M}\rangle \tag{8}$$

同理可得如下定理:

定理 2　切换系统(2) 的能控集为

$$T = \langle A \mid B_1\rangle + \langle A \mid B_2\rangle + \cdots + \langle A \mid B_N\rangle \tag{9}$$

由定理 1 和定理 2 可知系统(2) 的能达集与能控集相同, 且构成线性空间。于是可得如下定理:

定理 3　切换系统(2) 的能控性与能达性等价。

最后, 我们自然地得到系统能控的充要条件如下:

定理 4　切换系统(2) 完全能控的充分必要条件为

$$\langle A \mid B_1\rangle + \langle A \mid B_2\rangle + \cdots + \langle A \mid B_N\rangle = R^n \tag{10}$$

易知定理 4 同样也是系统(2) 完全能达的充分必要条件。

(下转第 253 页)

5　结　　语

本文给出了 H_2/l_1 混合优化问题的上逼近算法, 并通过算例验证了该算法。但由于收敛步数可能很大, 从而使得无法判断何时结束逼近。为克服这种情况, 可将文献[4] 给出的 H_2/l_1 混合优化问题的下逼近算法与上逼近算法相结合, 以判断何时收敛。文献[3] 给出了基于两个相同闭环传递函数的 H_2/l_1 混合优化问题的求解方法, 并指出算法可在有限步内终止。这正是我们今后在基于两个不同闭环传递函数的 H_2/l_1 混合优化问题中的研究方向。

参考文献:

[1] Francis B A. On robustness of the stability of feedback systems[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1980, 25 (4): 817-818.

[2] Voulgaris P. Optimal H_2/l_1 control: The SISO case[J]. IEEE Proc Decision and Control, 1994, 4 (4): 3181-3186.

[3] Volgaris P. Optimal H_2/l_1 control via duality theory [J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1995, 40(11): 1881-1888.

[4] 吴俊 H_2/l_1 混合优化控制研究[R]. 杭州: 浙江大学, 1996.

[5] 寇述舜. 凸分析与凸二次规划[M]. 天津: 天津大学出版社, 1994.

(上接第 247 页)

参考文献:

[1] Y F An, G Pang, D Aplevich. A hybrid model for intelligent control system[J]. J of Intelligent and Robotics System, 1994, 10(3): 221-241.

[2] A Gollu, P Varaiya. Hybrid dynamic system[A]. Proc of the 28th CDC[C]. Tamps: IEEE Control System Soc, 1989. 2708-2712.

[3] P Peleties, R Varaiya. A modelling strategy with event structure for hybrid systems[A]. Proc of the 28th CDC [C]. Tamps: IEEE Control System Soc, 1989. 1308-1313.

[4] Rafael Fierro, Frank L Lewis, Kai Liu. Hybrid control system design using a fuzzy logic interface[J]. Circuits Systems Signal Proceeding, 1998, 17(3): 401-419.

[5] Lin F, Sun J, Wang L Y. A hybrid control architecture with fuzzy interface for intelligent control[A]. Proc of the 31st IEEE Conf on Decision and Control [C]. Tamps: IEEE Control System Soc, 1992. 2539-2544.

(上接第 249 页)

3　结　　语

本文利用能控集和能达集的概念, 给出了一类混合动态系统完全能控、完全能达的充分必要条件, 并指出二者是等价的。这一代数判定条件类似于定常线性系统的相关条件, 表明二者有一定的相似性。这一研究工具可用于研究更一般的混合动态系统的能控性。

参考文献:

[1] Michael S B. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1998, 43(4): 475-482.

[2] Ezzine J, Haddad H H. Controllability and observability of hybrid systems[J]. Int J Contr, 1989, 49(6): 2045-2055.

[3] 谢广明, 郑大钟. 线性切换系统的能控性和能达性[J]. 控制理论与应用, 1999, 16(增刊): 135-140.