文章编号: 1001-0920(2001)02-0250-04

H_2/l_1 混合优化问题的凸二次规划解法

孔亚广, 吴 俊, 孙优贤
(浙江大学 工业控制技术研究所, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 采用上逼近算法求解 H_2/l_1 混合优化问题。首先将其转化为有限维的凸二次规划问题, 并利用 Lemke 互补转轴算法求解; 然后逐次进行逼近。计算示例表明所得结果是正确的。

关键词: H_2/l_1 混合优化问题; 凸二次规划; Lemke 互补转轴算法; 上逼近算法
中图分类号: TP 11 文献标识码: A

Convex Quadratic Programming for Mixed H_2/l_1 Optimal Control

KONG Ya-guang, WU Jun, SUN You-xian
(National Key Lab of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: The mixed H_2/l_1 optimal control is dealt with. Lower approximation solution is used to solve it. First, it is converted into finite dimension convex quadratic programming, and solved with Lemke complementary pivoting algorithm. Then the dimension is added until the solution convergents. At last an example is given to prove this algorithm.

Key words: mixed H_2/l_1 optimal control; convex quadratic programming; Lemke complement pivoting algorithm; lower approximation solutions

1 引 言

H_2 优化控制问题早在 20 世纪 60 年代便已开始研究, 迄今其理论和方法已相当成熟。H_2 控制系统具有良好的输入输出性能, 但其鲁棒性较差; l_1 优化控制能较满意地解决系统的鲁棒性能, 但其输入输出性能有时不够理想[1]。为有效地协调这两方面性能, Voulgaris[2,3] 提出了 H_2/l_1 混合优化控制, 但其只适用于两个闭环传递函数相等的情形。

本文采用文献[4] 提出的上逼近算法来求解具有两个不同闭环传递函数的 H_2/l_1 混合优化问题。其基本思想是: 首先将 H_2/l_1 混合优化问题转化为有限维的凸二次规划问题, 然后采用逐次逼近的方法来求解。文献[4] 给出了该算法的收敛性, 本文则通过仿真来进一步验证该算法。Lemke 互补转轴算法是求解凸二次规划问题的有效算法, 其求解精度和适用范围均优于其它算法, 因此本文采用该算法进行仿真。

2 Lemke 互补转轴算法和软件实现

讨论如下凸二次规划问题

$$\min \quad f(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Gx + c^{\mathrm{T}}x \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad Ax \leq b \tag{2}$$

$$x \geq 0 \tag{3}$$

收稿日期: 2000-03-14; 修回日期: 2000-05-31
作者简介: 孔亚广(1976—), 男, 江苏泰州人, 博士生, 从事 DEDS 和智能解耦控制等研究; 孙优贤(1940—), 男, 浙江诸暨人, 教授, 博士生导师, 中国工程院院士, 从事鲁棒控制和容错控制等研究。

其中, $c, x \in \mathscr{R}^n$, $b \in \mathscr{R}^m$, A 为 $m \times n$ 矩阵, G 为 $n \times n$ 对称正定矩阵。

引理 **1**(Kuhn-Tucker 最优性必要条件)　设 $f(x), h_i(x), g_j(x) \in C^1$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, p$; $x^{(0)}$ 为约束的正则点。若 $x^{(0)}$ 是 MP 的局部最优解, 则存在 $\lambda \in Em$, $\mu \in Ep$, 使

$$\nabla f(x^{(0)}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda \nabla h_i(x^{(0)}) - \sum_{i=1}^{p} \mu_j \nabla g_j(x^{(0)}) = 0$$

$$\mu_j g_j(x^{(0)}) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, p$$

$$\mu_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \cdots, p$$

令 y 为关于约束(2) 的松弛变量, u 和 v 为关于式(2) 和(3) 的 Lagrange 乘子向量, 利用 K-T 最优性条件可得

$$\begin{aligned} & y + Ax = b \\ & v - A^{\mathrm{T}}u - Gx = c \\ & u^{\mathrm{T}}y = 0, \quad v^{\mathrm{T}}x = 0 \\ & x, y, u, v \geq 0 \end{aligned}$$

令

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -A \\ A^{\mathrm{T}} & G \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix}$$

则上式可写成如下线性互补问题(LCP)

$$w - Mz = q \tag{4}$$

$$w, z \geq 0 \tag{5}$$

$$w^{\mathrm{T}}z = 0 \tag{6}$$

Lemke 互补转轴算法是针对线性互补问题而提出的, 其基本思想是: 在式(4) 中引入人工变量 z_0 和列向量 1, 且满足

$$w - Mz - 1z_0 = q, \quad z_0 \geq 0 \tag{7}$$

仿单纯形表, 按最小比准则, 首先让 z_0 进基, 在保证满足互补条件 $w^{\mathrm{T}}z = 0$ 的前提下, 选择下一步进基变量; 然后按最小比准则选择离基变量, 直到当前的离基变量为 z_0 为止。若当前的进基变量各元素均小于零, 则说明该凸二次规划问题无最优解。

若存在 m 个等式约束

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_n$$

$$i = 1, 2, \cdots, m$$

则可将其转化为如下 $m + 1$ 个不等式约束

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_n$$

$$i = 1, 2, \cdots, m$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\right) x_1 - \left(\sum_{i=1}^{m} a_{in}\right) x_n \leq -\sum_{i=1}^{m} b_i$$

本文中 Lemke 互补转轴算法是利用 Matlab 语言实现的。程序中针对存在等式约束和不等式约束的情况, 按上述 Lemke 互补转轴算法的步骤逐步实施, 最后给出最优解。程序中还设置了两个变量, 分别记录迭代次数和计算时间, 以考察算法的有效性。

3　H_2/l_1 混合优化问题

设 $\mathscr{R}$ 为全体有限维稳定的 SISO 离散传递函数, 则 H_2/l_1 混合优化问题可描述如下:

设 $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{V}_1, \hat{V}_2 \in \mathscr{R}$, r 为标量, 求解 $\hat{Q} \in \mathscr{R}l_1$, 使其满足

$$\mu = \inf_{Q \in \mathscr{R}l_1} \| \hat{T}_2 - \hat{V}_2 \hat{Q}_2 \|_2^2 \tag{8}$$

$$\text{s.t.} \quad \| \hat{T}_1 - \hat{V}_1 \hat{Q} \|_1 \leq r \tag{9}$$

其中, $\|\cdot\|_1$ 表示 l_1 范数, $\|\cdot\|_2$ 表示 H_2 范数。$\forall \hat{G} = G(0) + G(1)z^{-1} + \cdots \in \mathscr{R}$, 有

$$\| \hat{G} \|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |G(k)|, \quad \| \hat{G} \|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |G(k)|}$$

对任一非负整数 N, 记

$$Zl_{1N} = \left\{ \hat{G} \,\middle|\, \hat{G} = G(0) + G(1)z^{-1} + \cdots + G(N)z^{-N} \right\}$$

构造 H_2/l_1 混合优化问题的 N 维截断问题(OPTN)

$$\mu_N = \min_{\hat{Q} \in Zl_{1N}} \| \hat{T}_2 - \hat{V}_2 \hat{Q} \|_2^2$$

$$\text{s.t.} \quad \| \hat{T}_1 - \hat{V}_1 \hat{Q} \|_1 \leq r$$

定理 **1**[4]　$\lim_{N \to \infty} \mu_N = \mu$

定理 1 表明, H_2/l_1 混合优化问题可通过求解一系列的 OPTN 来逼近。设 $\hat{V}_1 \in \mathscr{R}$, $\hat{V}_2 \in \mathscr{R}$, 则 OPTN 可通过一系列的变换转化为有穷个变量和有穷个约束的凸二次规划问题(QP)

$$\tilde{\mu}_N(r) = \min\left(\sum_{k=0}^{n+N} (\Phi(k))^2 + \alpha(N) \right)$$

$$\Phi(k) = T_2(k) - \sum_{i=0}^{k} Q(i) V_2(k-i)$$

$$\Psi_+(j) - \Psi_-(j) = T_1(j) - \sum_{i=0}^{j} Q(i) V_1(j-i)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=0}^{m+N} (\Psi_+(j) + \Psi_-(j)) \leq r - \beta(N)$$

$$\Psi_+(j), \Psi_-(j) \geq 0$$

$$k \in \{0, 1, \cdots, n + N\}$$

$$j \in \{0, 1, \cdots, m + N\}$$

其中 $$\alpha(N) = \sum_{k=m+N+1}^{\infty} (T_2(k))^2$$

$$\beta(N) = \sum_{k=m+N+1}^{\infty} |T_1(k)|$$

由于 $\hat{V}_1 \neq 0$, 所以总能找到非负整数 $\sigma \geq 0$, 使得 $V_1(\sigma) \neq 0$ 且 $\forall i \in \{0, \cdots, \sigma - 1\}, V_1(i) = 0$。则 $[Q(0), \cdots, Q(N)]^T$, $[\Phi(0), \cdots, \Phi(n+N)]^T$ 可用 $[\Psi_+(\sigma), \Psi_-(\sigma), \cdots, \Psi_+(\sigma+N), \Psi_-(\sigma+N)]^T$ 表示。从而可将 QP 问题转化为标准的凸二次规划问题, 然后利用 Lemke 互补转轴算法来求解。

定义 1 $\forall N \in Z_+ \geq 0$

$$\xi_N(r) = \left\{\hat{\Phi} \middle| \hat{\Phi} = \hat{T}_2 - \hat{V}_2\hat{Q}, \| \hat{T}_1 - \hat{V}_1\hat{Q} \|_1 \leq r, \hat{Q} \in \mathscr{R}^{N+1} \right\}$$

定理 2[4] 假设 $\hat{V}_1$ 的所有零点均在单位圆内, 则必定存在非负整数 N_0, 使得对于 Z_+ 中任意的 $N \geq N_0$, 有 $\xi_N(r)$ 非空且为闭凸集。

显然, 目标函数有下界零, 则上述定理表明 QP 问题必有最优解。下面的定理表明, QP 与 OPTN 具有相同的最优解。

定理 3[4] $\forall N \in Z_+$ 且 $N \geq N_0$, 对于 QP 和 OPTN, 有 $\mu_N(r) = \tilde{\mu}_N(r)$。若

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}^* \\ \hat{\Psi}_+^* \\ \hat{\Psi}_-^* \\ \hat{Q}^* \end{bmatrix} \in \mathscr{R}^{n+N+1} \times \mathscr{R}^{m+N+1} \times \mathscr{R}^{m+N+1} \times \mathscr{R}^{N}$$

是 QP 的最优解, 则

$$\hat{\Phi}^{\#} = \begin{bmatrix} \Phi^{\#}(0) \\ \Phi^{\#}(1) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

是 OPTN 的最优解, 其中

$$\forall k \in Z_+$$

$$\Phi^{\#}(k) = \begin{cases} \Phi^{\#}(k), & 0 \leq k \leq n+N \\ T_2(k), & n+N < k \end{cases}$$

凸二次规划问题的求解可通过 Lemke 互补转轴算法来实现, 从而解决了 H_2/l_1 混合优化问题。

4 程序计算示例

设 $\hat{T}_1 = 2 + 4z^{-1}$, $\hat{V}_1 = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}$, $r = 10$, $\hat{T}_2 = 2 + 2z^{-1} + 4z^{-2}$。令 $m = 2, n = 2$, 并令

$$\Gamma_N\hat{T}_1 = (T_1(0), \cdots, T_1(N+m))^T \in \mathscr{R}^{N+m+1}$$

$$\Gamma_N\hat{T}_2 = (T_2(0), \cdots, T_2(N+n))^T \in \mathscr{R}^{N+n+1}$$

$$\epsilon_N^T = (1, \cdots, 1)^T \in \mathscr{R}^{N+m+1}$$

$$\varphi_{1N} = \begin{bmatrix} V_1(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1(N) & \cdots & V_1(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1(N+2) & \cdots & V_1(2) \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{2N} = \begin{bmatrix} V_2(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_2(N) & \cdots & V_2(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_2(N+2) & \cdots & V_2(2) \end{bmatrix}$$

对上述 QP 问题, 令

$$x = \mathscr{R}^{N+m+1} \times \mathscr{R}^{N+n+1} \times \mathscr{R}^{N+n+1} \times \mathscr{R}^{N+1}$$

$$\Omega = \{x \,|\, x = (\hat{\Phi}^T \quad \hat{\Psi}_+^T \quad \hat{\Psi}_-^T \quad \hat{Q}^T)^T, \hat{\Phi} \in \mathscr{R}^{N+m+1}, 0 \leq \hat{\Psi}_+ \in \mathscr{R}^{N+n+1}, 0 \leq \hat{\Psi}_- \in \mathscr{R}^{N+n+1}, \hat{Q} \in \mathscr{R}^{N+1}\}$$

则式(8) 和(9) 的 N 维 QP 问题可表示成

$$\min \tilde{\mu}_N(r) = x^T \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\text{s.t.} \ [0 \quad \epsilon_N \quad \epsilon_N \quad 0] x \leq r$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I & I & \varphi_{1N} \\ I & 0 & 0 & \varphi_{2N} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \Gamma_N & \hat{T}_1 \\ \Gamma_N & T_2 \end{bmatrix}$$

计算结果如表 1 所示。

表 1 计算结果

截取步长	执行时间	迭代步数	最优值
1	0.22	7	9.237 0
2	0.33	10	9.049 8
3	0.55	13	8.923 0
4	0.55	12	8.852 9
5	0.93	18	8.815 3
6	1.05	17	8.805 3
7	1.32	20	8.805 1
8	1.32	18	8.805 1

从而可得控制器为

$$Q = 0.238\,7 - 0.246\,3z^{-1} + 0.155\,0z^{-2} - 0.133\,0z^{-3} + 0.071\,3z^{-4} - 0.042\,6z^{-5} + 0.021\,2z^{-6} - 0.007\,4z^{-7}$$

从表 1 可以看出, 上述关于 H_2/l_1 混合优化问题的定理是正确的。

5 结　　语

本文给出了 H_2/l_1 混合优化问题的上逼近算法, 并通过算例验证了该算法。但由于收敛步数可能很大, 从而使得无法判断何时结束逼近。为克服这种情况, 可将文献[4] 给出的 H_2/l_1 混合优化问题的下逼近算法与上逼近算法相结合, 以判断何时收敛。文献[3] 给出了基于两个相同闭环传递函数的 H_2/l_1 混合优化问题的求解方法, 并指出算法可在有限步内终止。这正是我们今后在基于两个不同闭环传递函数的 H_2/l_1 混合优化问题中的研究方向。

参考文献:

[1] Francis B A. On robustness of the stability of feedback systems[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1980, 25 (4): 817-818.

[2] Voulgaris P. Optimal H_2/l_1 control: The SISO case[J]. IEEE Proc Decision and Control, 1994, 4(4): 3181-3186.

[3] Volgaris P. Optimal H_2/l_1 control via duality theory [J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1995, 40(11): 1881-1888.

[4] 吴俊. H_2/l_1 混合优化控制研究[R]. 杭州: 浙江大学, 1996.

[5] 寇述舜. 凸分析与凸二次规划[M]. 天津: 天津大学出版社, 1994.

(上接第 247 页)

参考文献:

[1] Y F An, G Pang, D Aplevich. A hybrid model for intelligent control system[J]. J of Intelligent and Robotics System, 1994, 10(3): 221-241.

[2] A Gollu, P Varaiya. Hybrid dynamic system[A]. Proc of the 28th CDC[C]. Tamps: IEEE Control System Soc, 1989. 2708-2712.

[3] P Peleties, R Varaiya. A modelling strategy with event structure for hybrid systems[A]. Proc of the 28th CDC [C]. Tamps: IEEE Control System Soc, 1989. 1308-1313.

[4] Rafael Fierro, Frank L Lewis, Kai Liu. Hybrid control system design using a fuzzy logic interface[J]. Circuits Systems Signal Proceeding, 1998, 17(3): 401-419.

[5] Lin F, Sun J, Wang L Y. A hybrid control architecture with fuzzy interface for intelligent control[A]. Proc of the 31st IEEE Conf on Decision and Control[C]. Tamps: IEEE Control System Soc, 1992. 2539-2544.

(上接第 249 页)

3 结　　语

本文利用能控集和能达集的概念, 给出了一类混合动态系统完全能控、完全能达的充分必要条件, 并指出二者是等价的。这一代数判定条件类似于定常线性系统的相关条件, 表明二者有一定的相似性。这一研究工具可用于研究更一般的混合动态系统的能控性。

参考文献:

[1] Michael S B. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1998, 43(4): 475-482.

[2] Ezzine J, Haddad H H. Controllability and observability of hybrid systems[J]. Int J Contr, 1989, 49(6): 2045-2055.

[3] 谢广明, 郑大钟. 线性切换系统的能控性和能达性[J]. 控制理论与应用, 1999, 16(增刊): 135-140.