

文章编号: 1001-0920(2001)02-0146-05

基于 LM I 方法的机器人 LPV 鲁棒 H_∞ 控制器设计

虞忠伟, 陈辉堂, 王月娟
(同济大学 电气工程系, 上海 200092)

摘要: 对平面两关节直接驱动机器人, 提出一种同时将闭环极点配置到满足动态响应区域内的变增益 LPV 鲁棒 H_∞ 控制器设计新方法。利用 LPV 的凸分解方法, 将机器人模型化为具有凸多面体结构的 LPV 模型, 然后利用 LM I 技术对凸多面体各顶点分别设计满足 H_∞ 性能和闭环极点配置的反馈增益, 再利用各顶点设计的反馈控制器综合得到具有凸多面体结构的 LPV 控制器。仿真结果验证了该控制器可使机器人随关节位置变化始终具有良好的控制性能。

关键词: 机器人; 线性变参数 (LPV); H_∞ 控制; 极点配置; 凸分解; LM I

中图分类号: TP 24 **文献标识码:** A

Robot Manipulator LPV Robust H_∞ Controller Design Based on LM I Approach

YU Zhong-wei, CHEN Hui-tang, WANG Yue-juan

(Department of Electrical and Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A new approach to design robust H_∞ controllers for a two-joint direct drive planar manipulator is presented. The time-varying nonlinear model of robot is translated into a linear parameter varying (LPV) system with convex polytopic version via the LPV convex decomposition technique. State feedback controllers satisfying H_∞ performance and pole placement at every vertex of convex polyhedron parameter space are designed via linear matrix inequalities (LMIs) approach. Using these designed controllers at every vertex, a LPV controller with smaller on-line calculating capacity is synthesized via convex decomposition techniques. Simulation results prove that the robot with the LPV controller has good performance as the joint angles vary.

Key words: robot; LPV; H_∞ control; pole placement; convex decomposition; LM I

1 引言

变增益控制是广泛应用于非线性/时变系统的工程设计方法。许多实际应用已证明该方法是非常有效的^[1,2]。其原理是通过设计局部控制器, 利用插值的方法得到全局控制器; 其本质特征是用线性控制器的设计方法, 设计参数相依或非线性/时变系统

的控制器^[3]。近年来, 由于鲁棒控制的不断发展, 使得变增益控制得到了深入的研究^[4], 特别是基于线性变参数 (LPV) 方法的变增益控制已应用于实际工程设计^[5]。直接驱动机器人的动态特性是一个非线性系统, 但通过转化可得到以关节位置和其变化率为变参数的 LPV 模型。

收稿日期: 2000-03-30; 修回日期: 2000-06-20

作者简介: 虞忠伟 (1973—), 男, 浙江杭州人, 博士生, 从事机器人控制与智能控制等研究; 陈辉堂 (1933—), 男, 广东潮阳人, 教授, 博士生导师, 从事机器人控制与智能控制等研究。

我们的目标是设计具有干扰衰减、鲁棒稳定、闭环响应满足一定要求的控制器。这些目标都可用 H 性能表示并通过 H 综合技术加以解决。因此,应用变增益 LPV H 控制可使直接驱动机器人在整个运动过程中始终具有良好的动态性能。

本文针对自行研制的平面两关节直接驱动机器人,结合变增益和 H 控制理论,利用 LPV 综合方法^[5],提出一种设计变增益鲁棒 H 控制器的新方法。该方法首先确定机器人关节的运动范围(包括关节位置和速度),然后利用 LPV 的凸分解技术,将机器人模型化为具有凸多面体结构的 LPV 模型,对凸多面体的各顶点分别设计满足 H 性能和动态特性的反馈增益,再利用各顶点设计的反馈增益综合得到具有凸多面体结构的 LPV 控制器。

随着 LM I 方法的应用, H 控制问题和极点配置问题可描述为包括 LM Is 约束的凸优化问题^[6],而 LM Is 可通过有效的内点优化算法来求解。因此,可通过求解一组 LM Is 来设计既满足 H 性能指标又获得良好动态性能的多目标控制器^[7]。本文则通过 MATLAB LM I Control Toolbox^[8]求解满足 H 性能和极点配置的 LM Is。

2 机器人模型及 LPV 表示

平面两关节直接驱动机器人的动力学方程可表示为^[9]

$$\begin{bmatrix} a & b\cos(\Theta_2 - \Theta_1) \\ b\cos(\Theta_2 - \Theta_1) & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\Theta}_1 \\ \ddot{\Theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b\dot{\Theta}_1\sin(\Theta_2 - \Theta_1) \\ b\dot{\Theta}_2\sin(\Theta_2 - \Theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中, $a = 5.6794 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $b = 1.4730 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $c = 1.7985 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

实际运动中,关节角速度 $\dot{\Theta}_1$ 和 $\dot{\Theta}_2$ 总是有界的,设 $|\dot{\Theta}_1| < v_1$, $|\dot{\Theta}_2| < v_2$, 并设状态向量 $x = [\Theta_1 \ \Theta_2 \ \dot{\Theta}_1 \ \dot{\Theta}_2]^T$, 控制矢量 $u = [\tau_1 \ \tau_2]^T$, 则式(1)可近似化为

$$\dot{x} = A(\Theta)x + B(\Theta)u \quad (2)$$

其中

$$A(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -m_{12}bv_1\sin(\Theta_2 - \Theta_1) & m_{11}bv_2\sin(\Theta_2 - \Theta_1) \\ 0 & 0 & -m_{22}bv_1\sin(\Theta_2 - \Theta_1) & m_{12}bv_2\sin(\Theta_2 - \Theta_1) \end{bmatrix}$$

$$B(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = c/[ac - b^2\cos^2(\Theta_2 - \Theta_1)]$$

$$m_{12} = m_{21} = \frac{-b\cos(\Theta_2 - \Theta_1)}{ac - b^2\cos^2(\Theta_2 - \Theta_1)}$$

$$m_{22} = a/[ac - b^2\cos^2(\Theta_2 - \Theta_1)]$$

式(2)是机器人动力学的 LPV 表示,其系数矩阵都是关节位置的函数。

本文所要解决的问题是设计一个增益同样随关节位置改变而变化的状态反馈 LPV 控制器,该控制器应满足一定的 H 性能,其闭环极点配置在所要求的范围内。

3 LPV 控制器设计

设机器人关节位置运动范围为 $\Theta_{1\min} \sim \Theta_{1\max}$, $\Theta_{2\min} \sim \Theta_{2\max}$, 则由该运动范围的 4 个顶点 $\phi_{n1} = (\Theta_{1\min}, \Theta_{2\min})$, $\phi_{n2} = (\Theta_{1\max}, \Theta_{2\min})$, $\phi_{n3} = (\Theta_{1\max}, \Theta_{2\max})$ 和 $\phi_{n4} = (\Theta_{1\min}, \Theta_{2\max})$ 组成一个凸四面体。由凸分解技术^[5], 机器人 LPV 表示式(2), 可用凸四面体上的 4 个顶点表示为

$$\dot{x} = \left[\sum_{i=1}^4 \rho_i(\Theta) A(\phi_{ni}) \right] x + \left[\sum_{i=1}^4 \rho_i(\Theta) B(\phi_{ni}) \right] u \quad (3)$$

其中

$$\rho_1(\Theta) = \frac{(\Theta_{1\max} - \Theta_1)(\Theta_{2\max} - \Theta_2)}{(\Theta_{2\max} - \Theta_{2\min})(\Theta_{1\max} - \Theta_{1\min})}$$

$$\rho_2(\Theta) = \frac{(\Theta_{1\max} - \Theta_1)(\Theta_2 - \Theta_{2\min})}{(\Theta_{2\max} - \Theta_{2\min})(\Theta_{1\max} - \Theta_{1\min})}$$

$$\rho_3(\Theta) = \frac{(\Theta_1 - \Theta_{1\min})(\Theta_2 - \Theta_{2\min})}{(\Theta_{2\max} - \Theta_{2\min})(\Theta_{1\max} - \Theta_{1\min})}$$

$$\rho_4(\Theta) = \frac{(\Theta_1 - \Theta_{1\min})(\Theta_{2\max} - \Theta_2)}{(\Theta_{2\max} - \Theta_{2\min})(\Theta_{1\max} - \Theta_{1\min})}$$

$$\sum_{i=1}^4 \rho_i(\Theta) = 1$$

对于具有凸多面体结构的 LPV 模型(3), 对顶点 ϕ_{n1} , ϕ_{n2} , ϕ_{n3} 和 ϕ_{n4} 分别设计满足要求的状态反馈增益 K_1, K_2, K_3 和 K_4 。与 LPV 模型的凸分解结构相似, 以顶点反馈增益 $K_1 \sim K_4$ 作为凸多面体 LPV 控制器的 4 个顶点, 在凸多面体内任意位置 Θ 利用各顶点设计的反馈控制器综合得到具有凸多面体结构的 LPV 控制器^[5](见图 1), 则有

$$K = \rho_1(\Theta)K_1 + \rho_2(\Theta)K_2 + \rho_3(\Theta)K_3 + \rho_4(\Theta)K_4 \quad (4)$$

对于各顶点, 利用 LM I 方法设计满足要求的控

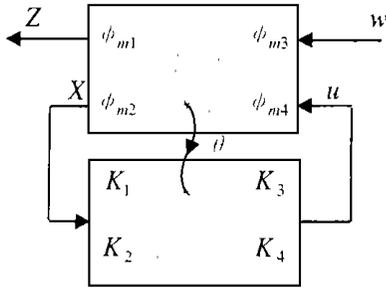


图1 LPV 控制器设计原理

制器。为此首先给出如下定义:

定义1(LMI区域) 设 D 为复平面的一个子集, 如果存在一对称矩阵 $\alpha = [\alpha_{kl}] \in R^{m \times m}$ 和矩阵 $\beta = [\beta_{kl}] \in R^{m \times m}$, 满足 $D = \{z \in C: f_D(z) < 0\}$, 其中

$$f_D(z) = \alpha + z\beta + z\bar{\beta}^T = [\alpha_{kl} + \beta_{kl}z + \beta_{lk}\bar{z}]_{k,l=1}^m$$

为 D 的特征函数(在 $m \times m$ Hermitian 矩阵空间取值), 则称 D 为LMI区域。

定义1中, $M = [\mu_{kl}]_{k,l=1}^m$ 表示 M 是一个 $m \times m$ 矩阵, 其一般项为 μ_{kl} 。

对于系统 $\dot{x} = Ax$, 它在LMI区域中的极点定位可描述为

$$M_D(A, X) = [\alpha_{kl}X + \beta_{kl}AX + \beta_{lk}XA^T]_{k,l=1}^m$$

其中 X 为对称正定阵。 $M_D(A, X)$ 与 $f_D(z)$ 之间可通过代换 $(X, AX, XA^T) \Leftrightarrow (1, z, \bar{z})$ 联系起来。

对于任意LMI区域 D , 由文献[7], 机器人凸多面体LPV模型(3)平方 D -稳定的充分必要条件是: 存在Lyapunov矩阵 X 和状态反馈增益 K , 定义 $L = KX$, 使得式(3)的每个顶点都满足 $M_D(A + BK, X) < 0$, 即

$$[\alpha_{kl}X + \beta_{kl}(A(\phi_i)X + B(\phi_i)L) + \beta_{lk}(A(\phi_i)X + B(\phi_i)L)^T]_{k,l} < 0 \quad (5)$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \quad (6)$$

下面对凸多面体LPV模型(3)的各顶点设计满足要求的控制器。在各顶点处, 机器人LPV模型(3)可看作下列LTI系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \quad (7)$$

$$Z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \quad (8)$$

其中, $w(t)$ 为外部输入项, $Z(t)$ 表示 H 性能输出。因为机器人控制要求由关节参考输入引起的关节位置误差具有 H 性能, 因此设 $w(t)$ 为关节位置参考输入, $Z(t)$ 为关节位置误差。结合式(3)和图2可得

$$A = A(\phi_i), \quad B_2 = B(\phi_i)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

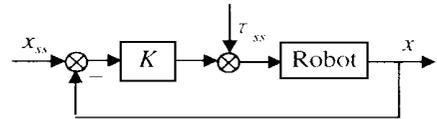


图2 闭环控制原理

对于系统(7)和(8), 在状态反馈控制 $u = Kx$ 下, 从干扰 $w(t)$ 到输出 $Z(t)$ 的传函设为 $T_{wz}(s)$, 假设闭环 H 性能 $\gamma > 0$ 给定, 我们的目标是设计状态反馈 K , 使得:

- 1) 闭环极点配置到一定的LMI稳定区域 D ;
- 2) 保证 H 性能 $T_{wz} < \gamma$

为取得满意的动态性能, 要求闭环极点配置到图3所示的区域 $S(\alpha, r, \theta)$ 内。这样便可保证最小衰减率 α , 最小阻尼 $\xi = \cos\theta$ 和最大无阻尼自然频率 $\omega_n = r\sin\theta$ 在一定的范围内, 从而保证了最大超调、振荡频率、延迟时间、上升时间和调节时间。由定义1, 区域 $S(\alpha, r, \theta)$ 即为LMI区域。

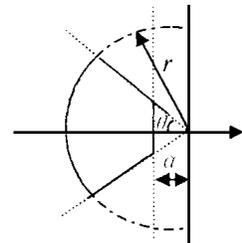


图3 系统极点配置区域 $S(\alpha, r, \theta)$

假设 $(A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, D_{cl})$ 为 $T_{wz}(s)$ 的闭环实现, 对图3所示的极点配置区域 $S(\alpha, r, \theta)$, 根据 $M_D(A, X)$ 与 $f_D(z)$ 之间的关系, 由式(5)和(6)可得满足闭环极点配置要求的LMI为: 存在 $X_D > 0$, 使得

$$A_{cl}X_D + X_D A_{cl}^T + 2\alpha X_D < 0 \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} -rX_D & A_{cl}X_D \\ X_D A_{cl}^T & -rX_D \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \sin\theta(A_{cl}X_D + X_D A_{cl}^T) & \cos\theta(A_{cl}X_D - X_D A_{cl}^T) \\ \cos\theta(X_D A_{cl}^T - A_{cl}X_D) & \sin\theta(A_{cl}X_D + X_D A_{cl}^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

由有界实引理^[6], 保证 H 性能 $T_{wz} < \gamma$ 的LMI为: 存在 $X > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X + X A_{cl}^T & B_{cl} & X C_{cl}^T \\ B_{cl}^T & -\mathcal{Y} & D_{cl}^T \\ C_{cl}X & D_{cl} & -\mathcal{Y} \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

定理 1 对于系统(7)和(8), 给定 $\mathcal{Y} > 0$, 存在正定对称矩阵 X 和 $L = KX$, 满足如下不等式约束

$$AX + XA^T + B_2L + L^TB_2^T < (-2\alpha)X \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} -rX & AX + B_2L \\ XA^T + L^TB_2^T & -rX \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_2L + L^TB_2^T & & & \\ & B_1^T & & \\ & C_1X + D_{12}L & & \\ & B_1 & XC_1^T + L^TD_{12}^T & \\ -\mathcal{Y} & & D_{11}^T & \\ D_{11} & & -\mathcal{Y} & \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sin\theta \cdot AX + X(\sin\theta \cdot A)^T + (\sin\theta \cdot B_2)L + L^T(\sin\theta \cdot B_2)^T \\ I_{21} &= \cos\theta \cdot AX - \cos\theta \cdot XA^T + \cos\theta \cdot B_2L - \cos\theta \cdot L^TB_2^T \\ I_{12} &= I_{21}^T, \quad I_{22} = I_{11} \end{aligned}$$

假设 (X^*, L^*) 为上述不等式约束的一个可行优化解, 则状态反馈增益 $K^* = L^*(X^*)^{-1}$ 不仅可保证 H_∞ 性能 \mathcal{Y} , 而且可保证闭环极点配置在所要求的范围内。

证明 由式(7)和(8)及 $u = Kx$, 可得

$$\begin{aligned} A_{cl} &= A + B_2K, \quad B_{cl} = B_1 \\ C_{cl} &= C_1 + D_{12}K, \quad D_{cl} = D_{11} \end{aligned}$$

设 $X = X_D = X > 0, L = KX$ 代入式(9)~(12), 便可得出式(13)~(16)。(证毕)

上述不等式约束可通过 LM I 优化软件(如 LM I Control Toolbox) 很容易求解^[8]。

在利用定理 1 求得各个顶点满足要求的反馈增益后, 由凸多面体 LPV 控制器(4)可求得任意 θ 的反馈控制 K 。值得注意的是各顶点反馈增益的获得均是离线进行的, 实时在线计算只有式(4), 因此在实际控制时, 本文设计的控制器计算量小, 实现简单。

由于本文的控制对象是一个参考输入系统, 因此控制器 $u = Kx$ 又可进一步变为

$$u = K(x - x_{ss}) + \tau_{ss}$$

其中, x_{ss} 为稳定的状态输入, τ_{ss} 为与 x_{ss} 对应的稳定状态力矩。综合控制如图 3 所示。可以看出, 该控制器在形式上与 PD + 重力项补偿的控制很相似。

4 仿真研究

下面对式(1)所示的机器人系统进行仿真研究。机器人的运动范围为: $\theta_{min} = 0, \theta_{max} = \pi, \dot{\theta}_{min} = 0, \dot{\theta}_{max} = \pi$ 要求系统闭环极点配置在 $\alpha = 1, r = 3, \theta = \pi/4$ 的区域内。利用 MATLAB LM I Control Toolbox, 由定理 1, 经优化算法得最优 $\mathcal{Y} = 0.0109$, 对应于 4 个顶点的状态反馈增益矩阵分别为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 25.2205 & 6.5411 & 20.4850 & 5.3130 \\ 6.5411 & 7.9866 & 5.3130 & 6.4870 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 25.2205 & -6.5411 & 20.4850 & -5.3130 \\ -6.5411 & 7.9866 & -5.3130 & 6.4870 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 25.2205 & 6.5411 & 20.4850 & 5.3130 \\ 6.5411 & 7.9866 & 5.3130 & 6.4870 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 25.2205 & -6.5411 & 20.4850 & -5.3130 \\ -6.5411 & 7.9866 & -5.3130 & 6.4870 \end{bmatrix}$$

与 4 个顶点相应的闭环极点均为

$$\{-1.8035 \pm 1.0980i, -1.8035 \pm 1.0980i\}$$

由此可见, 所求得的控制器不仅满足极点配置的要求, 而且因优化的 \mathcal{Y} 值很小而具有很好的 H_∞ 性能, 所以控制器满足设计要求。在求得 4 个顶点的状态反馈增益矩阵后, 由式(4)可得 LPV 控制器为

$$K(\theta) = \rho_1(\theta)K_1 + \rho_2(\theta)K_2 + \rho_3(\theta)K_3 + \rho_4(\theta)K_4$$

其中 $\rho_i(\theta) = 1$

仿真中设参考输入为一方波, 利用第 3 节的控制方法, 关节 1 和关节 2 的位置响应曲线和控制量曲线如图 4 所示。从图 4 可看出, 在具有凸多面体结构的 LPV 控制器作用下, 其阶跃响应无超调, 运动平滑, 上升时间较小, 同时对快速变化的参考输入具有很强的跟踪能力。

5 结 语

本文结合变增益和 H_∞ 理论, 利用 LPV 综合技术, 提出一种可同时将闭环极点配置到满足动态响

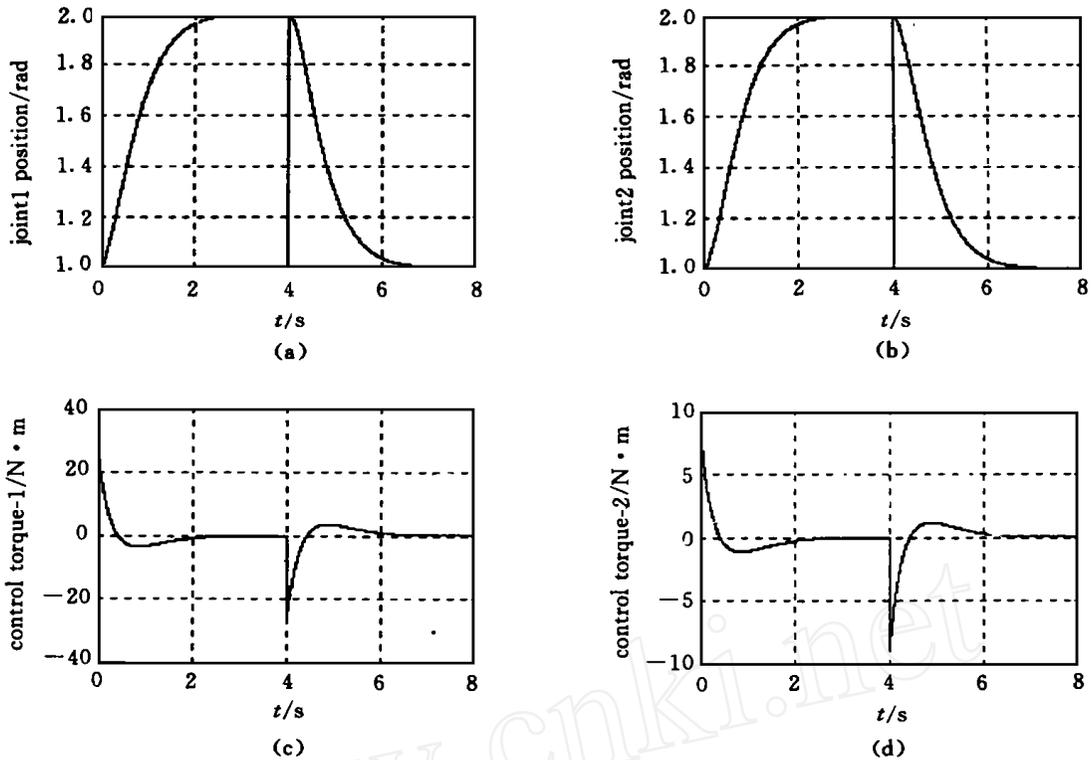


图4 关节1、2位置的响应曲线和控制量的变化

(a) 关节1位置响应 (b) 关节2位置响应 (c) 关节1控制力矩 (d) 关节2控制力矩

应区域内的变增益LPV鲁棒 H_∞ 控制器设计的新方法。该方法通过LPV的凸分解技术,将机器人模型化为具有凸多面体结构的LPV模型,对凸多面体的各顶点分别设计满足 H_∞ 性能和动态特性的反馈增益,利用各顶点设计的反馈控制器综合得到具有凸多面体结构的LPV控制器。在对顶点控制器的设计中,利用LM I技术得到满足设计要求的优化解。该控制器在线计算量小,实现容易。仿真结果验证了所设计的LPV控制器可使机器人随关节位置变化始终具有良好的动态性能。

参考文献:

- [1] P Apkarian, J Biannic Gain scheduled H_∞ control of missile via linear matrix inequalities[J]. J of Guid, Contr and Dyn, 1995, 18(3): 532-538
- [2] P Apkarian, P Gahinet, G Becker Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems: A design example[J]. Automatica, 1995, 31(9): 1251-1261.
- [3] J S Shamma, M Athans Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1990, 35(8): 898-907.
- [4] P Apkarian, P Gahinet A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1995, 40(5): 853-863
- [5] Hiroyuki Kajiwara, Pierre Apkarian, Pascal Gahinet LPV techniques for control of an inverted pendulum [J]. IEEE Contr Syst, 1999, 19(1): 44-54
- [6] P Gahinet, P Apkarian A linear matrix inequality approach to H_∞ control[J]. Int J Robust Nonlinear Contr, 1994, 4(3): 421-448
- [7] M Chilali, P Gahinet H_∞ design with pole placement constraints: An LM I approach [J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1996, 41(3): 358-367.
- [8] P Gahinet, A Nemirovski, A Laub *et al.* The LM I control toolbox [A]. Proc of 33rd Conf on Decision and Control[C]. Lake Buena Vista, 1994 2038-2041.
- [9] 虞忠伟,陈辉堂 基于滑模观测器的摩擦力自适应补偿方案[J]. 机器人, 1999, 21(7): 562-568