文章编号: 1001-0920(2001)02-0159-04

两类特殊故障源作用下函数元系统的可靠性评估

邓北星[1], S A Lozhkin[2]
(1. 清华大学 电子工程系, 北京 100084; 2. 莫斯科国立大学 计算数学与控制论学院, 莫斯科 119899)

摘　要: 证明了在故障源作用下无可靠输入数组的函数元系统的可靠性估计定理, 建立了一种新的故障源模型, 即具有可靠输入数组的常可靠故障源。利用概率分析方法研究了在这类故障源作用下, 由函数单元构成的函数元系统的可靠性, 给出了函数元系统可靠度的下界估计, 阐明了在此类故障源作用下的单元函数不可能构成充分可靠的函数元系统。

关键词: 故障源; 可靠度; 故障单元; 故障函数
中图分类号: TP 202.1　　　文献标识码: A

Reliability Estimations of Systems Consisting of Functional Elements Effected by Two Special Kind of Failure Sources

DENG Bei-xing[1], *S A Lozhkin*[2]
(1. Electronic Engineering Department, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2. Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State University, Moscow 119899, Russia)

Abstract: The theorem about the reliability estimation of the systems consisting of functional elements which have not reliable input set effected by failure sources is presented. Models of constant reliable failure source are built. By applying probability analysis methods, the reliability of the systems effected by the failure sources is studied and the lower bound of the reliability is presented. The results show that it is impossible that the elements effected by the failure sources can build arbitrarily reliable systems.

Key words: failure source; reliability; failure element; failure function

1 引　　言

在研究故障源作用下由函数元构成的系统特性时, Neuman 和 Jablonski 给出了一种故障源(Neuman 故障源), 在其作用下函数元系统的可靠性评估满足 Neuman 定理[1,2]。Neuman 定理表明, 在该故障源作用下, 由函数元构成的函数元系统的可靠性的下界估计为一确定的常数。Neuman 定理同时表明, 利用 Neuman 故障源作用下的函数单元不可能构成任意可靠的函数元系统。Tarasov 建立了一类没有可靠输入数组的故障源模型[3], 并给出了在其作用下函数元系统可靠度的下界估计定理, 但未给出证明。随后有人进一步研究了这方面问题, 取得了一些令人感兴趣的结果[4~6]。

收稿日期: 2000-03-30; 修回日期: 2000-08-15
基金项目: 留学回国人员科研基金项目(9800197); 清华大学骨干人才支持计划项目(99100)
作者简介: 邓北星(1964—), 男, 黑龙江哈尔滨人, 讲师, 博士后, 从事控制系统的可靠性、电磁兼容性的理论与应用等研究; S A Lozhkin(1954—), 男, 俄罗斯人, 教授, 博士, 从事控制系统的可靠性、网络系统综合及复杂性研究。

本文首先给出文献[3]的下界估计定理的证明,并建立了一类具有可靠输入数组的故障源模型(常可靠故障源),给出并证明了在常可靠故障源作用下函数元系统可靠度的下界估计定理,进而证实了在常可靠故障源作用下的函数单元不可能构成充分可靠的函数元系统。

2 几个基本概念

在下面的叙述中,记Σ表示由函数元构成的系统,简称系统。构成Σ的单元取自某一集合B,B^{n_i}表示所有n_i维数组构成的集合。约定文中所指函数均为二值布尔逻辑函数,例如$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是依赖于n个变量的二值逻辑函数。

定义1 设存在系统Σ和函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,如果在任意输入数组$\bar\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$的激励下,$\Sigma$输出值$f(\bar\sigma)$的概率不小于1/2,则称系统$\Sigma$输出(或实现)函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

设S为故障源,S作用于Σ。在S作用下,如果Σ的构成单元F_k不发生故障,则称F_k为可靠单元;反之,如果F_k发生故障,则称该单元为不可靠单元。

设$B=\{F_1,F_2,\cdots,F_u\}$由不可靠的函数元构成,其中单元F_i是具有$n_i(1\leq i\leq u)$个输入端和一个输出端的初等变换器,且在正常状态下输出某一依赖于n_i个变量的函数$f_i^{(0)}(x_1,x_2,\cdots,x_{n_i})$。因为利用$B$中的单元可以构成系统,所以将$B$称为构成系统的一个基底。

定义2 B中的单元$F_i(i=1,2,\cdots,u)$在非故障状态(或称正常状态)下所实现的函数$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_{n_i})$称为正常函数,通常记为$f_i^{(0)}(x_1,x_2,\cdots,x_{n_i})$。相应地,$F_i$在故障状态下所实现的函数称为故障函数。

在S的作用下,F_i或保持正常状态或转变为故障元,而相应的函数$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_{n_i})$或为正常函数或转变为故障函数。

下面给出单元F_i正常函数和所有可能发生的故障函数以及相应的发生概率,并表示成如下形式

$$(G_i:P_i) \tag{1}$$

其中

$$G_i=(f_i^{(1)}(x_1,\cdots,x_{n_i}),f_i^{(2)}(x_1,\cdots,x_{n_i}),\cdots,f_i^{(r_i)}(x_1,\cdots,x_{n_i}))$$

$$P_i=(p_i^{(1)},p_i^{(2)},\cdots,p_i^{(r_i)})$$

且$1\leq r_i\leq 2^{2^{n_i}}$,$\sum_{j=1}^{r_i}p_i^{(j)}=1$。当$1\leq j\leq r_i$时,$p_i^{(j)}>0$;$f_i^{(1)}(x_1,x_2,\cdots,x_{n_i})=f_i^{(0)}(x_1,x_2,\cdots,x_{n_i})$为函数元$F_i$在正常状态下实现的函数。

于是可给出如下定义:

定义3 将$(G_i:P_i)$称为F_i的函数概型。

定义4 将系统Σ发生故障的概率称为Σ的不可靠度,用$Q(\Sigma)$表示;而系统在某一输入数组$\tilde\sigma$上发生错误的概率称为Σ在$\tilde\sigma$的不可靠度,用$Q(\Sigma,\tilde\alpha)$表示。相应地,Σ的可靠度可分别表示为$1-Q(\Sigma)$和$1-Q(\Sigma,\tilde\alpha)$。

对单元F_i和B设置常数p_B如下

$$p_B=\min_{i,F_i\in B}p_{\min}^{(i)},\quad p_{\min}^{(i)}=\min_{1\leq j\leq r_i}p_{\min}^{(j)} \tag{2}$$

其中,$\min\limits_{i,F_i\in B}p_{\min}^{(i)}$表示在所有的单元中取相应的最小概率。

定义5 对任意小的正数$\epsilon>0$,如果存在系统Σ和函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,使得在任何输入数组的激励下,Σ输出函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$发生错误的概率都小于ϵ,则称函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为系统Σ的渐近可靠输出。

定义6 设存在某一故障源,且在其作用下B中的单元F_i具有函数概型(1),其中$r_i=2^{2^{n_i}}$,则称该故障源为Neuman故障源,记为S_N。

据此可给出如下定理:

定理1(Neuman定理) 对S_N作用下的任何系统Σ满足$Q(\Sigma)\geq p_B$。

定义7 设给定基底B和故障源S,如果对于任意函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和任意小的正数$\epsilon>0$,存在建立在B上的系统Σ,该系统在正常状态下输出函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,且满足$Q(\Sigma)<\epsilon$,则对给定的S而言,可利用B中的不可靠单元构成任意可靠的系统。

定理1和定义7表明,利用S_N作用下的单元不可能构成任意可靠的系统。

3 在故障源作用下没有可靠输入数组系统的可靠性评估

定义8 如果某一单元F_v在某一数组$\tilde\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n_v})$激励下不发生错误,则称$\tilde\alpha$为$F_v$的可靠输入数组。

设在正常状态下F_v实现函数$f_v(x_1,x_2,\cdots,x_{n_v})$,且$f_v(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n_v})=a$,如果用$p_a^{F_v}(\tilde\alpha)$表示单元在数组$\tilde\alpha$激励下输出正确值$a$的概率,则有$p_a^{F_v}(\tilde\alpha)$

= 1。

下面观察集合 $B_1 = \{F_1, F_2, \cdots, F_i, \cdots\}$, 其中 B 中的单元 F_i 在正常状态下实现函数 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n_i})$, 并且对每一输入数组 $(0, \cdots, 0)$, $(0, \cdots, 0, 1)$, $(0, \cdots, 1, 0)$, $\cdots$, $(1, \cdots, 1)$, 已知 F_i 在其激励下发生错误的概率为

$$1/2 > \epsilon^{F_i}(0, \cdots, 0), \cdots, \epsilon^{F_i}(1, \cdots, 1) > 0 \quad i = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

取常数 $\delta = \inf\limits_i \min\limits_{\tilde{\sigma}} \epsilon^{F_i}(\tilde{\sigma})$, 显然 $0 < \delta < 1/2$。

下面研究建立在集合 B_1 上的系统 Σ, 显然它没有可靠输入数组。首先给出如下定理:

定理 2 对任何建立在基底 B_1 上的系统 Σ, 在任一输入数组 $\tilde{\sigma}$ 激励下发生错误的概率不可能小于 δ, 即 Σ 的不可靠度满足 $Q(\Sigma, \tilde{\sigma}) \geq \delta$。

证明 如图 1 所示, 设系统 Σ 在正常状态下实现函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 任意输入数组为 $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$, $f(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) = a (a \in \{0, 1\})$, S_φ 是 Σ 的子系统。用 $p^{\Sigma}_{f(\tilde{\sigma})}(\tilde{\sigma})$ 表示系统在数组 $\tilde{\sigma}$ 激励下输出 $f(\tilde{\sigma})$ 的概率; 用 $p^{S_\varphi}_{\tilde{\beta}}(\tilde{\sigma})$ 表示子系统 S_φ 的输出端出现数组 $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_i})$ 的概率。

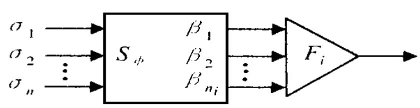

图 1 无可靠输入数组的系统

对 Σ 进行概率分析, 可得系统输出值为 a 的概率为: 子系统 S_φ 中 $\tilde{\sigma}$ 输出 $\tilde{\beta}$ 的概率与输入为 $\tilde{\beta}$ 时单元 F_i 输出 a 的概率的乘积和, 即

$$p^{\Sigma}_a(\tilde{\sigma}) = \sum_{\tilde{\beta}} p^{S_\varphi}_{\tilde{\beta}}(\tilde{\sigma}) p^{F_i}_a(\tilde{\beta}) = \sum_{\tilde{\beta} \in M_0} p^{S_\varphi}_{\tilde{\beta}}(\tilde{\sigma}) p^{S_\varphi}_{\tilde{r}} + \sum_{\tilde{\gamma} \in N_0} p^{S_\varphi}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\sigma}) p^{F_i}_a(\tilde{\gamma}) \tag{4}$$

其中
$$M_0 = \{\tilde{\beta}: p^{F_i}_a(\tilde{\beta}) \geq 1/2\}$$
$$N_0 = \{\tilde{\gamma}: p^{F_i}_a(\tilde{\gamma}) < 1/2\}$$

显然, $0 < \delta < 1/2$, $1/2 < 1 - \delta < 1$。如果 $\tilde{\gamma} \in N_0$, 则

$$p^{F_i}_a(\tilde{\gamma}) < 1/2 < 1 - \delta \tag{5}$$

如果 $\tilde{\beta} \in M_0$, 则

$$p^{F_i}_a(\tilde{\beta}) = 1 - p^{F_i}_{\bar{a}}(\tilde{\beta}) < 1 - \delta \tag{6}$$

由式(4) 得

$$p^{\Sigma}_a(\tilde{\sigma}) = (1 - \delta) \sum_{\tilde{\beta} \in M_0} p^{S_\varphi}_{\tilde{\beta}}(\tilde{\sigma}) + (1 - \delta) \sum_{\tilde{\gamma} \in N_0} p^{S_\varphi}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\sigma}) = (1 - \delta) \sum_{\tilde{\beta}} p^{S_\varphi}_{\tilde{\beta}}(\tilde{\sigma}) \tag{7}$$

由于 $\sum\limits_{\tilde{\beta}} p^{S_\varphi}_{\tilde{\beta}}(\tilde{\sigma}) = 1$, 于是 $p^{\Sigma}_a(\tilde{\sigma}) \leq 1 - \delta$。因此

$$Q(\Sigma, \tilde{\sigma}) = 1 - p^{\Sigma}_a(\tilde{\sigma}) \geq \delta \tag{8}$$

(证毕)

可以看出, 定理 2 所研究的基底集合中, 每个单元都没有可靠的输入数组。如果基底集合中存在具有可靠的输入数组的单元, 那么在此集合上建立的系统是否有类似于定理 2 的结果呢? 下面着重讨论这一问题。

4 常可靠故障源的模型及在其作用下系统可靠性的评估

设集合 $B_2 = \{F_1, F_2, \cdots, F_i, \cdots\}$, 其中 B 中的单元 F_i 在正常状态下实现函数 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n_i})$, 且 F_i 至少有一个可靠的输入数组, 在这些可靠的输入数组上 f_i 取相同的逻辑值。

设 F_i 的可靠输入数组为 $\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \cdots, \tilde{\tau}_{m_i}$, $1 \leq m_i < 2^{n_i}$; 并设置常数

$$\delta = \inf_i \min_{\tilde{\sigma} \neq \tilde{\tau}_i, i = 1, \cdots, m_i} \epsilon^{F_i}(\tilde{\sigma}) \tag{9}$$

其中 ϵ^{F_i} 定义与第 3 节相同, 且 $0 < \delta < 1/2$。

定义 9 存在故障源 S_2, 如果在它的作用下, 任何具有可靠输入数组的单元在其可靠输入数组上实现相同的逻辑值, 则称 S_2 为常可靠故障源。

对于常可靠故障源作用下的系统, 其可靠性估计定理如下:

定理 3 对任何在常可靠故障源 S_2 作用下的系统 Σ, 如果它在正常状态下不实现常逻辑值, 则必存在某一输入数组 $\tilde{\alpha}$, 满足 $Q(\Sigma, \tilde{\alpha}) \geq \delta$, 即在输入数组 $\tilde{\alpha}$ 上 Σ 的不可靠度不可能小于常数 δ。

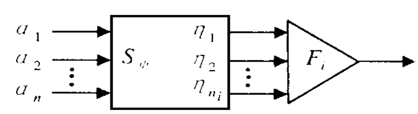

图 2 常可靠故障源作用下的系统

证明 如图 2 所示, 设 Σ 在正常状态下不实现逻辑常值, 且其输出端 F_i 具有 m_i 个可靠输入数组, 设为 $\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \cdots, \tilde{\tau}_{m_i}$, $1 \leq m_i < 2^{n_i}$, 并且

$$f_i(\tilde{\tau}_1) = f_i(\tilde{\tau}_2) = \cdots = f_i(\tilde{\tau}_{m_i}) = a$$

因为 Σ 在正常状态下不实现逻辑常值, 所以可取输入数组 $\tilde{\alpha}$, 使 $f(\tilde{\alpha}) = \bar{a}$。当子系统 S_φ 出现数组 $\tilde{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n_i})$ 时, 对系统 Σ 在 $\tilde{\alpha}$ 上进行概率分析, 得

$$p^{\Sigma}_{\bar{a}}(\tilde{\alpha}) = \sum_{\tilde{\eta}} p^{S_\varphi}_{\tilde{\eta}}(\tilde{\alpha}) p^{F_i}_{\bar{a}}(\tilde{\eta}) =$$

$$\sum_{\eta \neq \tilde{\tau}_i} p_{\eta}^{S\varphi}(\tilde{\alpha}) p_{a}^{F_i}(\eta) + \sum_{j=1}^{m_i} p_{\tau_j}^{S\varphi}(\tilde{\alpha}) p_{a}^{F_i}(\tilde{\tau}_j) \quad (10)$$

显然, $p_{a}^{F_i}(\tilde{\tau}_j) = 0$; 而当 $\eta = \tilde{\tau}_j$ 时, 有

$$p_{a}^{F_i}(\eta) = 1 - \delta, \quad j = 1, 2, \cdots, m_i \quad (11)$$

且 $\sum_{\eta \neq \tilde{\tau}_j} p_{\eta}^{S\varphi}(\tilde{\alpha}) = 1$。由此得

$$p_{a}^{\Sigma}(\tilde{\alpha}) = (1 - \delta) \sum_{\eta} p_{\eta}^{S\varphi}(\tilde{\alpha}) = 1 - \delta \quad (12)$$

最后得

$$Q(\Sigma, \tilde{\alpha}) = 1 - p_{a}^{\Sigma}(\tilde{\alpha}) \geq \delta \quad (13)$$

(证毕)

很容易找到许多不是常可靠故障源的例子, 并可构造不满足定理 3 的系统。

5 结 论

本文研究了故障源作用下没有可靠输入数组系统的可靠性评估, 并建立了常可靠故障源的模型, 给出并证明了在其作用下系统可靠性的估计定理。由上述分析及不可靠单元构成充分可靠系统的定义, 可以证明在常可靠故障源作用下的单元不可能构成充分可靠的系统。

参考文献:

[1] J Von Neuman. Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components[M]. Princeton: Princeton University Press, 1956.

[2] Яблонский С В. Надежность управляющих систем– Методическая разработка по курсу Элементы кибернетики[M]. Ротапринт НИВЦМГУ, 1991.

[3] Тарасов В В. К проблеме полноты для систем функций алгебры логики с ненадежной реализацей[J]. математический сборник, 1975, 99(3): 378–394.

[4] Тарасов В В. К синтезу надежных схем изненадежных элементов[J]. Математические заметки, 1976, 20(3): 391–400.

[5] Deng B X. Study of attribute of functional element system[A]. Proc of 2nd Int Conf on Discrete Models in Control System Theory[C]. Moscow: Dialogue-MSU, 1997. 25–26.

[6] 邓北星, S A Lozhkin. 基于 Neuman 故障源的实故障源模型[J]. 控制与决策, 2000, 15(6): 716–718.

(上接第 158 页)

参考文献:

[1] A Hmamed. Note on the stability of large-scale system with delay[J]. Int J Syst Sci, 1986, 17(7): 1083–1087.

[2] Wang W J, Song C C, Kao C C. Robustness bounds for large-scale systems with structure and unstructured uncertainties[J]. Int J of Syst Sci, 1991, 22(1): 209–216.

[3] T Mori, N Fukuma, M Kuwahara. Simple stability criteria for single and composite linear systems with time delays[J]. Int J Contr, 1981, 34(6): 1179–1184.

[4] I H Suh, Z Bien. A note on the stability of large-scale system with delay[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1982, 27(1): 256–258.

[5] R W Lewis, B D O Andson. Necessary and sufficient for delay-independent stability of linear autonomous systems[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1980, 25(4): 735–739.

[6] B S Razumihkin. The application of Lyapunov's method to problem in stability systems with delay[J]. Autom & Remote Contr, 1960, 21(3): 515–520.

[7] J K Hale. Theory of functional differential equation[M]. New York: Springer-Verlag, 1997.

[8] M H Chang. Stability of interconnected stochastic delay systems[J]. Appl Math Comput, 1985, 16(2): 277–295.

[9] B Xu, Y Lui. An improved Razumikhin-type theorem and its applications[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1994, 39(4): 839–841.

[10] B Xu. On delay-independent stability of large-scale systems with time delay[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1995, 40(5): 930–933.

[11] Schoen G M, Geering H P. A note robustness bounds for large-scale time-delay systems[J]. Int Syst Sci, 1995, 26(12): 2441–2444.

[12] Lakshmikanthasm V, Leela S. Differential and integral inequalities[M]. New York: Academic Press, 1969.

[13] Palmer K J. A sufficient condition that a matrix has eigenvalues with nonzero real parts[J]. Linear Multilinear Algebra, 1979, 7(1): 43–45.

[14] Tong W T. Distribution of eigenvalues for several classes of matrices[J]. Acta Math Sci, 1977, 20(4): 272–275.