

文章编号: 1001-0920(2001)03-311-04

# 混合动态系统的稳定性

俞新贞, 吴澄

(清华大学 自动化系, 北京 100084)

**摘要:** 讨论混合动态系统(HDS)的稳定性问题。首先给出关于 HDS 的稳定性、可吸收性和渐近稳定性的几个结论, 然后给出关于 HDS 的 Lyapunov 稳定性定理。

**关键词:** HDS; 混合动态系统; 稳定性; 可吸收性; 渐近稳定性; Lyapunov 稳定性

中图分类号: O 317

文献标识码: A

## Stability of Hybrid Dynamic Systems

YU Xin-zhen, WU Cheng

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** The problems of Lyapunov stability are studied. First, some results about stability, attractability, and asymptotical stability of hybrid dynamic systems are given out. And then Lyapunov stability theorem of hybrid dynamic systems is presented.

**Key words:** HDS; hybrid dynamic systems; stability; attractability; asymptotical stability; Lyapunov stability

### 1 引言

近年来, 许多学者对混合动态系统的 Lyapunov 稳定性问题进行了研究<sup>[1~4]</sup>, 所得结论中, 有些对一般的非线性系统成立, 有些则只应用于线性系统。关于 Lyapunov 稳定性的大多结果, 都要求一个或多个辅助函数的存在性条件成立, 而这些函数通常就是 Lyapunov 函数的推广。

本文进一步研究混合动态系统的稳定性问题, 推导出一系列结论, 并讨论了混合动态系统的 Lyapunov 稳定性问题。

### 2 预备知识

混合动态系统(HDS)所覆盖的领域非常广泛。现有文献中给出了若干关于 HDS 的定义, 通常每个定义都有其相应的应用领域。本文采用由 Ye 等<sup>[5]</sup>给出的定义。

**定义 1** 设  $S$  为  $T$  上由一族运动组成的集合, 定义为  $S = \{p(\bar{\sigma}, a, t_0) \in X, p(t_0, a, t_0) = a\}$ 。称 5 元组  $\{T, X, A, S, T_0\}$  为混合动态系统(HDS)。其中,  $T$  是时间集合(通常为  $\mathbb{R}^+$ ),  $X$  是系统的状态集合, 其度量为  $d$ ,  $T_0 < T$  是初始时间集合,  $A \subset X$  是系统的初始状态集合,  $S$  是运动集合, 其定义为  $p(\bar{\sigma}, a, t_0): T \rightarrow X$ 。

**注 1** 为简便计, 这里引用了文献[5]中关于 HDS 定义的一个简化版本。关于 HDS 定义的严格叙

收稿日期: 2000-01-14; 修回日期: 2000-09-08

**作者简介:** 俞新贞(1963—), 男, 安徽芜湖人, 博士后, 从事离散事件系统等研究; 吴澄(1940—), 男, 浙江嘉兴人, 教授, 博士生导师, 中国工程院院士, 国家 863 计划自动化领域首席科学家, 从事集成系统的整体设计方法及实施、系统结构与平台技术等研究。

述, 参见文献[5]。

**定义2** 设 $\{T, X, A, S, T_0\}$ 为HDS。如果 $a \in M$ 且可导出对所有的 $t \in T_{a, t_0}$ 和 $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$ , 均有 $p(t, a, t_0) \in M$ , 则称集合 $M < A$ 为关于 $S$ 的不变集合; 如果 $\{x_0\}$ 是一个关于 $S$ 的不变集合, 则称 $x_0 \in A$ 为系统的平衡点。

**定义3** 设 $\{T, X, A, S, T_0\}$ 为HDS,  $M < A$ 为关于 $S$ 的一个不变集合。对任意的 $E > 0$ 和 $t_0 \in T_0$ , 存在一个 $G = G(E, t_0) > 0$ , 当 $d(a, M) < G$ 时, 对所有的 $t \in T_{a, t_0}$ 和 $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$ ,  $d(p(t, a, t_0), M) < E$ 成立, 则称 $(S, M)$ 稳定。

上述定义中的 $G = G(E)$ 如果独立于初始时间 $t_0 \in T_0$ , 则称 $(S, M)$ 一致稳定。

**定义4** 设 $\{T, X, A, S, T_0\}$ 为HDS,  $M < A$ 为关于 $S$ 的不变集合。称 $(S, M)$ 可吸收, 如果对任意的 $t_0 \in T_0$ , 存在 $Q(t_0) > 0$ , 当 $d(a, M) < Q(t_0)$ 时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(p(t, a, t_0), M) = 0 \quad (1)$$

对所有的 $t \in T_{a, t_0}$ 和 $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$ 成立。

对任意的 $E > 0$ 和 $t_0 \in T_0$ , 存在 $G > 0$ 和 $T(E) > 0$ , 当 $d(a, M) < G$ 时, 对所有的 $t \geq t_0 + T(E)$ 和 $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$ ,  $d(p(t, a, t_0), M) < E$ 成立, 则称 $(S, M)$ 一致稳定并一致可吸收。

**定义5** 设 $\{T, X, A, S, T_0\}$ 为HDS,  $M < A$ 为关于 $S$ 的不变集合。称 $(S, M)$ 渐近稳定, 如果它既稳定又可吸收; 称 $(S, M)$ 一致渐近稳定, 如果它一致可吸收。

设 $R$ 为实数集合,  $R^+$ 为非负实数集合,  $C[R^+, R^+]$ 为从 $R^+$ 到 $R^+$ 的连续函数集合。

**定义6** 函数 $\phi \in C[R^+, R^+]$ 属于 $K$ 类, 如果 $\phi(0) = 0$ 且 $\phi$ 严格递增; 函数 $R \in C[R^+, R^+]$ 属于 $L$ 类, 如果 $R$ 严格递减且 $\lim_{r \rightarrow 0} R(r) = 0$ 。

### 3 HDS的稳定性定理

为简便计, 这里只给出HDS的一致稳定性、一致可吸收性和一致渐近稳定性定理的叙述和证明。首先给出几个引理, 其证明参见文献[1]。

**引理1**  $(S, M)$ 一致稳定, 当且仅当存在函数 $f \in C[R^+, R^+]$ 满足 $f(0) = 0$ , 对所有的 $t \in T_{a, t_0}$ 和 $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$ , 有

$$d(p(t, a, t_0), M) \leq f(d(a, M)) \quad (2)$$

成立。

**引理2**  $(S, M)$ 一致可吸收, 当且仅当存在 $G > 0$ (独立于 $t_0 \in T_0$ ), 函数 $g \in C[R^+, R^+]$ 满足

$\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$ , 使得当 $d(a, M) < G$ 时, 对所有的 $t \in T_{a, t_0}$ 和 $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$ , 有

$$d(p(t, a, t_0), M) < g(t - t_0) \quad (3)$$

成立。

**引理3**  $(S, M)$ 一致渐近稳定, 当且仅当存在 $G > 0$ (独立于 $t_0 \in T_0$ ), 函数 $f \in C[R^+, R^+]$ 满足 $f(0) = 0$ , 函数 $g \in C[R^+, R^+]$ 满足 $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$ , 使得当 $d(a, M) < G$ 时, 有

$$d(p(t, a, t_0), M) < f(d(a, M))g(t - t_0) \quad (4)$$

对所有的 $t \in T_{a, t_0}$ 和 $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$ 成立。

**定理1**  $(S, M)$ 一致稳定, 当且仅当存在函数 $f_1, f_2 \in C[R^+, R^+]$ , 满足 $f_1(0) = f_2(0) = 0$ , 以及 $\inf_{r \in [E, \infty)} f_1(r) > 0$ 对任意的 $E > 0$ 成立, 使得

$$f_1(d(p(t, a, t_0), M)) \leq f_2(d(a, M)) \quad (5)$$

对所有的 $t \in T_{a, t_0}$ 和 $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$ 成立。

**证明** 必要性: 由引理1知, 存在函数 $f_2 \in C[R^+, R^+]$ 满足 $f_2(0) = 0$ , 使得

$$d(p(t, a, t_0), M) \leq f_2(d(a, M)) \quad (6)$$

对所有的 $t \in T_{a, t_0}$ 和 $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$ 成立。

取函数 $f_1 \in C[R^+, R^+]$ 满足 $f_1(0) = 0$ , 以及 $\inf_{r \in [E, \infty)} f_1(r) > 0$ 对任意的 $E > 0$ 成立, 使得 $f_1(r) \leq r$ 。因此

$$f_1(d(p(t, a, t_0), M)) \leq d(p(t, a, t_0), M) \leq f_2(d(a, M)) \quad (7)$$

对所有的 $t \in T_{a, t_0}$ 和 $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$ 成立。

充分性: 对任意的 $E > 0$ 和 $t_0 \in T_0$ , 设 $\inf_{r \in [E, \infty)} f_1(r) = G(E)$ 。由 $f_2(0) = 0$ 知存在 $Q(E) > 0$ (独立于 $t_0 \in T_0$ ), 使得当 $d(a, M) < G$ 时, 有 $f_2(d(a, M)) < G$ 。

设 $d(a, M) < G$ 。由 $f_1(d(p(t, a, t_0), M)) \leq f_2(d(a, M)) < G$ 知,  $d(p(t, a, t_0), M) < E$ 对任意的 $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$ 和 $t \in T_{a, t_0}$ 成立。因此 $(S, M)$ 一致稳定。(证毕)

**定理2**  $(S, M)$ 一致可吸收, 当且仅当存在 $G > 0$ , 函数 $f \in C[R^+, R^+]$ 满足 $f(0) = 0$ , 以及 $\inf_{r \in [E, \infty)} f(r) > 0$ 对任意的 $E > 0$ 成立, 函数 $g \in C[R^+, R^+]$ 满足 $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$ , 使得当 $d(a, M) < G$ 时, 有

$$f(d(p(t, a, t_0), M)) \leq g(t - t_0) \quad (8)$$

对所有 $t \in T_{a, t_0}$ 和 $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$ 成立。

**证明** 必要性: 取 $f \in C[R^+, R^+]$ 满足 $f(0) = 0$ ,  $\inf_{r \in [E, \infty)} f(r) > 0$ 对任意的 $E > 0$ 成立, 使得 $f(r) \leq r$ 。

由引理2知存在 $G > 0$ , 函数 $g \in C[R^+, R^+]$ 满足 $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$ , 使得当 $d(a, M) < G$ 时, 有

$$\begin{aligned} f(d(p(t, a, t_0), M)) &\leq \\ d(p(t, a, t_0), M) &\leq g(t - t_0) \end{aligned} \quad (9)$$

对所有  $t \in T_{a, t_0}$  和  $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$  成立。

充分性: 对任意的  $E > 0$  和  $t_0 \in T_0$ , 设  $\inf_{[E, \infty)} f(r) = G(E) > 0$ 。由  $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 0$  知存在充分大的常数  $T(E) > 0$  (独立于  $t_0 \in T_0$ ), 使得当  $t > t_0 + T(E)$  时, 有  $g(t - t_0) < G$ 。

设  $d(a, M) < G$  和  $t > t_0 + T(E)$ 。由  $f(d(p(t, a, t_0), M)) \leq g(t - t_0) < G$  知,  $d(p(t, a, t_0), M) < E$  对任意的  $t > t_0 + T(E)$  和  $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$  成立。因此  $(S, M)$  一致可吸收。(证毕)

**定理 3**  $(S, M)$  一致渐近稳定, 当且仅当存在  $G > 0$ , 函数  $V \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$  满足  $V(0) = 0, \inf_{[E, \infty)} V(r) > 0$  对任意的  $E > 0$  成立,  $f \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$  满足  $f(0) = 0$ , 函数  $g \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$  满足  $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 0$ , 使得当  $d(a, M) < G$  时, 有

$$\begin{aligned} V(d(p(t, a, t_0), M)) &\leq \\ f(d(a, M))g(t - t_0) &\end{aligned} \quad (10)$$

对所有  $t \in T_{a, t_0}$  和  $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$  成立。

证明 必要性: 取  $V \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$  满足  $V(0) = 0, \inf_{[E, \infty)} V(r) > 0$  对任意的  $E > 0$ , 使得  $V(r) \leq r$ 。由引理 3 知存在  $G > 0$ , 函数  $f \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$  满足  $f(0) = 0$ , 函数  $g \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$  满足  $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 0$ , 使得当  $d(a, M) < G$  时, 有

$$\begin{aligned} V(d(p(t, a, t_0), M)) &\leq \\ d(p(t, a, t_0), M) &\leq \\ f(d(a, M))g(t - t_0) &\end{aligned} \quad (11)$$

对所有  $t \in T_{a, t_0}$  和  $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$  成立。

充分性: 首先证明  $(S, M)$  一致稳定。由  $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 0$  知存在常数  $M_g > 0$ , 使得  $g(r) \leq M_g$ 。对任意的  $E > 0$  和  $t_0 \in T_0$ , 设  $G(E) = \inf_{[E, \infty)} V(r) > 0$ 。由  $f(0) = 0$  知存在  $G(E) > 0$  (独立于  $t_0 \in T_0$ ), 使得当  $r \in [0, G]$  时, 有  $f(r) < G/M_g$ 。设  $G = \min\{G, G\}$  (独立于  $t_0 \in T_0$ ) 和  $d(a, M) < G$ 。由  $V(d(p(t, a, t_0), M)) \leq M_g f(d(a, M)) < G$  知,  $d(p(t, a, t_0), M) < E$  对任意的  $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$  和  $t \in T_{a, t_0}$  成立。因此  $(S, M)$  一致稳定。

显然, 存在常数  $M_f > 0$ , 使得当  $r \in [0, G]$  时, 有  $f(r) \leq M_f$ 。因此存在  $G > 0$ , 函数  $V \in C[\mathbb{R}^+,$

$\mathbb{R}^+]$  满足  $V(0) = 0, \inf_{[E, \infty)} V(r) > 0$  对任意的  $E > 0$  成立, 函数  $M_f g \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$  满足  $\lim_{r \rightarrow \infty} M_f g(r) = 0$ , 使得当  $d(a, M) < G$  时,  $V(d(p(t, a, t_0), M)) \leq f(d(a, M))g(t - t_0) < M_f g(t - t_0)$  对任意的  $t \in T_{a, t_0}$  和  $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$  成立。

由定理 2 知  $(S, M)$  一致可吸收, 因此  $(S, M)$  一致渐近稳定。(证毕)

## 4 Lyapunov 稳定性

设时间集合  $T$  为非负实数集  $\mathbb{R}^+$ 。

**定理 4** 设  $\{R^+, X, A, S, R_0^+\}$  为 HDS,  $M < A$ 。如果:

1) 存在函数  $V: X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f_1 \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$  满足  $f_1(0) = 0, \inf_{[E, \infty)} f_1(r) > 0$  对任意的  $E > 0$  成立,  $f_2 \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$  满足  $f_2(0) = 0$ , 使得

$$\begin{aligned} f_1(d(x, M)) &\leq V(x, t) \leq \\ f_2(d(x, M)) &\end{aligned} \quad (12)$$

对所有  $x \in X$  和  $t \in \mathbb{R}^+$  成立;

2) 存在函数  $h \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$  满足  $h(0) = 0$ , 使得

$$V(p(t, a, t_0), t) \leq h(V(a, t_0)) \quad (13)$$

对所有  $t \in \mathbb{R}^+$  和  $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$  成立, 则  $(S, M)$  是不变的且一致稳定。

证明 设  $a \in M$ , 由  $V(a, t_0) \leq f_2(d(a, M))$  知  $V(a, t_0) = 0$ 。由条件 2) 可知  $V(p(t, a, t_0), t) = 0$ , 由条件 1) 可得出  $d(p(t, a, t_0), M) = 0$ , 所以  $p(t, a, t_0) \in M$  对所有  $t \in \mathbb{R}^+$  和  $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$  成立。因此  $(S, M)$  是不变的。

对任意的  $E > 0$  和  $t_0 \in R_0^+$ , 设  $\inf_{[E, \infty)} f_1(r) = G(E) > 0$ 。由  $h(0) = 0$  知存在  $G(E) > 0$  (独立于  $t_0 \in R_0^+$ ), 使得当  $V(a, t_0) < G$  时, 有  $h(V(a, t_0)) < G$ 。

由于  $f_2(0) = 0$ , 由  $V(a, t_0) < f_2(d(a, M))$  知存在  $G(E) > 0$  (独立于  $t_0 \in R_0^+$ ), 使得当  $d(a, M) < G(E)$  时, 有  $V(a, t_0) < G$ 。

设  $d(a, M) < G$ 。由  $f_1(d(p(t, a, t_0), M)) \leq h(V(a, t_0)) \leq G$  知,  $d(p(t, a, t_0), M) < E$  对任意的  $p(\tilde{\delta}, a, t_0) \in S$  和  $t \in \mathbb{R}^+$  成立。因此  $(S, M)$  一致渐近稳定。(证毕)

(下转第 317 页)

法每次总能得到 2 859. 81 的最好结果, 改进了 15%。不同的是, 在 1 000 次实验中, B 算法 100% 收敛于现有最好结果, 求解质量极为稳定。

对于随机产生的 160 个问题, B 算法有 50%~95% 的几率得到优于 GCA 的结果, 无劣于 GCA 的情况出现。结果平均改善了 3. 65%~11. 76%, 大幅度超过了遗传算法和模拟退火算法, 求解质量也非常稳定。

(上接第 310 页)

#### 参考文献:

- [1] 李合生, 毛剑琴, 韩宇. 小波变换在大地回波噪声处理中的应用[J]. 北京航空航天大学学报, 2001, 27(2): 221-225.
- [2] 李世玲, 李合生, 李治. 小波滤波器在弱信号检测中的应用及设计[J]. 西南交通大学学报, 2000, 35(1): 86-89.
- [3] S Mslat, W L Hang. Singularity detection and processing with wavelets [J]. IEEE Trans on Inf Theory, 1992, 38(2): 617-643.

#### 参考文献:

- [1] 汪泓, 韩文秀. 一种新的优化算法: B 算法[J]. 系统工程学报, 1999, 14(3): 276-279.
- [2] IH Osman, G Laporte. Metaheuristics: A bibliography [J]. Annuals of Operations Research. 1996, (63): 513-628.
- [3] 汪泓. 复合随机全局优化算法的理论、方法与应用研究 [D]. 天津: 天津大学, 1999.

- [4] 陈逢时. 子波变换理论及在信号处理中的应用[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1998. 184-191.
- [5] Daubechies I. The wavelet transform time-frequency localization and signal analysis [J]. IEEE Trans on Inf Theory, 1990, 36(3): 961-1005.
- [6] 杰里 L 伊伏斯, 爱德华 K 里迪. 现代雷达原理[M]. 北京: 电子工业出版社, 1991. 274-279.

(上接第 313 页)

## 5 结 论

本文研究了混合动态系统的稳定性问题, 导出了一系列等价性的结论。关于 Lyapunov 函数和本文结论中的一些函数的结构性问题将在后续文章中给出。这些问题包括: 是否存在同一函数对所有的子系统均成立, 如果存在这样的函数, 其结构如何; 对每一个子系统, 都有其各自的 Lyapunov 函数, 在这种情形下, 其结构又该如何。

#### 参考文献:

- [1] W Hahn. Stability of motion[M]. Berlin: Springer-Ver-

- lag, 1967.
- [2] A N Michel, K Wang. Qualitative theory of dynamical systems [M]. New York: Marcel Dekker, 1995.
- [3] K M Passino, A N Michel, P J Antsaklis. Lyapunov stability of a class of discrete event systems [J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1994, 39(2): 269-279.
- [4] S Pettersson, B Lennartson. LMI for stability and robustness of hybrid systems [A]. Proc American Control Conf [C]. New Mexico, 1997. 1714-1718.
- [5] H Ye, A N Michel, L Hou. Stability theory for hybrid dynamical systems [J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1998, 43(4): 461-474.