文章编号: 1001-0920(2001) 03-314-04

离散 β 算法的研究

汪 泓, 韩文秀
(天津大学 管理学院, 天津 300072)

摘 要: β 算法是求解全局优化问题的高效算法, 通过利用子算法的组合、搜索空间的压缩来快速求解全局优化问题。针对组合优化问题有限解空间和复杂高维邻域系统的特点, 引入表达求解该问题的邻域系统的实值函数, 以此为基础提出了离散 β 算法(DBA), 并讨论了其基本性质和收敛性。

关键词: β 算法; 搜索; 组合优化; 复合随机计算系统
中图分类号: O 224 文献标识码: A

Study on Discrete Beta-algorithm

WANG Hong, *HAN Wen-xiu*
(Management School, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: DBA (Discrete Beta-Algorithm) is an efficient algorithm for global optimal problem. Combining subalgorithms and searching compressed, evaluations are bounded. Continuous optimization problems can be efficiently solved. In combinatorial optimization problems, searching is preformed in a limited set and the dimension is normally very high. A real value function is involved in the computation to represent the neighbor-system of the problem. Based on this improvement, DBA is presented and the properties and convergence are discussed.

Key words: beta-algorithm; search; combinatorial optimization; cooperative stochastic computing system

1 引 言

β 算法是求解全局优化问题的高效算法, 它通过利用子算法的组合、搜索空间的压缩来快速求解全局优化问题。但以连续解空间为背景的算法在求解组合优化问题时, 无法针对组合优化问题特点进行更有效的处理。针对这一问题, 本文提出了离散 β 算法(DBA), 并讨论了其基本性质和收敛性。

2 基本定义

不失一般性, 这里研究的问题表示为

$$\min_{x\in\Omega} f(x) \tag{1}$$

其中, Ω 是表达可行域的任意有限集合, f 是在 Ω 上的一个有界实值函数。可将 Ω 表示为

$$\Omega = \{1, 2, \cdots, N\} \tag{2}$$

将近似解定义为集合

$$U^* = \{u \mid f(u) \le \min_{x\in\Omega} f(x) + \epsilon, u \in \Omega\} \tag{3}$$

其中 ϵ 是预先给定的允许误差(若 $\epsilon = 0$, 则 U^* 便为问题(1) 的精确解)。

收稿日期: 2000-03-13; 修回日期: 2000-07-17
基金项目: 国家自然科学基金项目(79970043)
作者简介: 汪泓(1972—), 男, 江西上饶人, 博士生, 从事优化算法等研究; 韩文秀(1938—), 女, 山东济南人, 教授, 博士生导师, 从事复合系统的协调与优化等研究。

1)为求解问题(1),需给出实数值函数 g,使得对于 $\forall x, y \in \Omega$,有

$$g(x, y) \geq 0, \quad g(x, x) > 0$$

该函数表达了求解该问题的邻域系统,它充分体现了组合优化问题有限解空间和复杂高维邻域系统的特点,是 DBA 的基础。

在描述算法前,首先给出一些基本定义(对于 $\forall h \in R$):

定义 1

$$\alpha_h(x, y) = \begin{cases} \dfrac{g(x, y)\delta_h(y)}{\sum\limits_{z=1}^{N} g(x, z)\delta_h(z)}, & \sum\limits_{z=1}^{N} g(x, z)\delta_h(z) > 0 \\ 0, & \sum\limits_{z=1}^{N} g(x, z)\delta_h(z) \leq 0 \end{cases} \tag{4}$$

定义 2　若 $\exists \{z_1, z_2, \cdots, z_m\} \subseteq \Omega$,使得

$$\alpha_{h_0}(x, z_1) > 0, \quad h_0 = f(x) + h$$

$$\alpha_{h_i}(z_i, z_{i+1}) > 0, \quad \alpha_{h_m}(z_m, y) > 0$$

$$h_i = \min(h_{i-1}, f(z_i) + h), \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

则记为 $\beta_h(x, y)$。

定义 3　若 $\exists \{z_1, z_2, \cdots, z_m\} \subseteq \Omega$,使得

$$\alpha_{h_0}(x, z_1) > 0, \quad h_0 = f(x) + h$$

$$\alpha_{h_i}(z_i, z_{i+1}) > 0, \quad \alpha_{h_m}(z_m, y) > 0$$

$$h_i = \min(h_{i-1}, f(z_i) + h), \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$f(y) < h_m - h$$

则记为 $\beta_h^*(x, y)$。

定义 4

$$\begin{cases} L\beta_h(x) = \{y \mid \beta_h(x, y), y \in \Omega\} \\ L\beta_h^*(x) = \{y \mid \beta_h^*(x, y), y \in \Omega\} \end{cases} \tag{5}$$

定义 5

$$\begin{cases} J\beta_h(y) = \{x \mid \beta_h(x, y), x \in \Omega\} \\ J\beta_h(B) = \{x \mid \exists b \in B, \beta_h(x, b), x \in \Omega\} \end{cases} \tag{6}$$

定义 6　若 $h \in R$,使得 $\Omega \subseteq J\beta_h(U^*)$,且对 $\forall x \in \Omega$,有 $L\beta_h(x) \subseteq \Omega$,则 β_h 遍历。

定义 7

$$\begin{cases} h_\beta(x, y) = \inf\{h \mid \beta_h(x, y), h \in R\} \\ h_\beta(x, B) = \inf\{h \mid \exists b \in B, \beta_h(x, b), h \in R\} \end{cases} \tag{7}$$

围绕以上定义,有如下一些性质:

性质 1

1)　$\beta_h^*(x, y) \Rightarrow \beta_h(x, y)$

2)　$L\beta_h^*(x) \subseteq L\beta_h(x)$

性质 2　若 $h_0 \geq h_1$,则有

1)　$\Omega_{h_1} \subseteq \Omega_{h_0}$

2)　$\Omega_{h_1}^* \subseteq \Omega_{h_0}^*$

性质 3　设 $h_0 \geq h_1$,则有

1)　$\delta_{h_0}(x) \geq \delta_{h_1}(x)$

2)　$\alpha_{h_1}(x, y) > 0 \Rightarrow \alpha_{h_0}(x, y) > 0$

性质 4　设 $h_0 \geq h_1$,若 $\beta_{h_1}(x, y)$,则 $\beta_{h_0}(x, y)$。

性质 5　设 $h_0 \geq h_1$,则有

1)　$L\beta_{h_1}(x) \subseteq L\beta_{h_0}(x)$

2)　$L\beta_{h_1}^*(x) \subseteq L\beta_{h_0}^*(x)$

性质 6　若 $\beta_h^*(x, y)$,则有

1)　$L\beta_h(y) \subseteq L\beta_h(x)$

2)　$L\beta_h^*(y) \subseteq L\beta_h^*(x)$

3　算法的基本机理

算法将搜索划分成若干并发的阶段模块,每个阶段给予不同的 h,这样每个阶段都有自己的 $L\beta_h(x)$ 和 $L\beta_h^*(x)$。对任意的 x,h 较大的阶段 $L\beta_h(x)$ 就大;h 较小的阶段 $L\beta_h(x)$ 就小。同一阶段中,若 $y \in L\beta_h^*(x)$,则 $L\beta_h(y) \subseteq L\beta_h(x)$ 且 $L\beta_h^*(y) \subseteq L\beta_h^*(x)$,即目标函数值较大的 x,$L\beta_h(x)$ 就大;目标函数值较小的 x,$L\beta_h(x)$ 就小。

在两个方向上寻找压缩搜索范围的方法:一方面通过各个阶段 h 的下降,使得 $L\beta_h(x)$ 和 $L\beta_h^*(x)$ 向 U^* 压缩;另一方面通过将新的搜索点转移到 $L\beta_h^*(x)$ 中,使得 $L\beta_h(x)$ 和 $L\beta_h^*(x)$ 向 U^* 压缩。同时,有 $U^* \cap L\beta_{h_\beta(x, U^*)}(x) \neq \varnothing$ 恒成立,即压缩搜索范围不会将 U^* 从搜索范围中排除。于是随着算法的运行,$L\beta_h^*(x)$ 将逐渐变得与 U^* 足够相近,而搜索过程最终会落入 U^* 中的点。

4　算法的步骤及局部搜索方法

算法的框图如图 1 所示。

算法各个阶段形成串级结构,第一阶段也必须满足遍历性,且有

$$h_1 \geq h_2 \geq \cdots \geq h_n \tag{8}$$

各个阶段的求解信息逐级向下一阶段传递,形成一个信息搜索流水线。

在图 1 中,$L\beta_h(x)$ 是随机选取样本 y 的范围。在 x 的邻域中随机选取样本 y,使得

$$P_x(y) \geq c_\epsilon \alpha_h(x, y) \tag{9}$$

其中常数 $c_\epsilon \in [0, 1]$ 给邻域搜索以灵活性。一般可

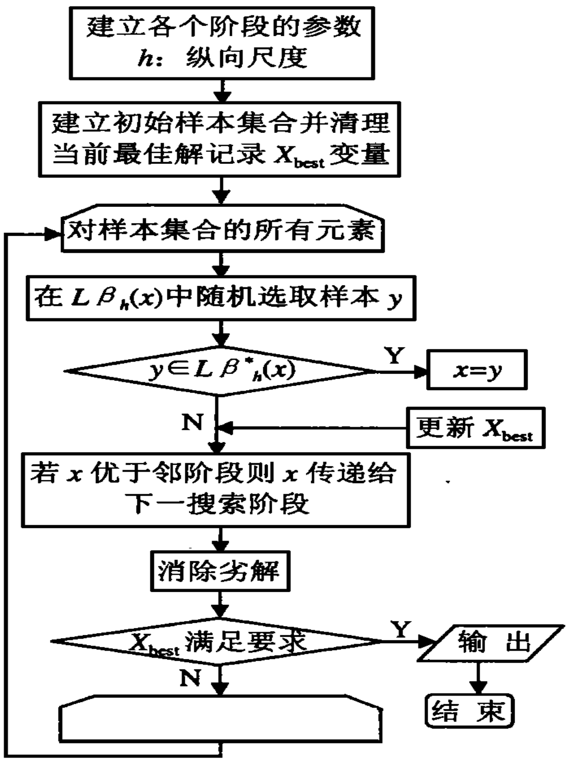

图 1 (λ,h) β算法框图

借鉴 Tabu Search[2] 等局部搜索宏观化方法，这样不但可加速算法的收敛，缩短平均收敛时间，而且对长期收敛性并无影响。

5 收敛性

离散β算法以概率 1 收敛于全局最优解集或足够好地近似解集。这里给出相关引理及其证明。

引理 1　若离散β算法符合遍历性前提，而搜索起点位于Ω内部，则算法总在Ω内部搜索。

引理 2　若β算法符合遍历性前提，则∃ $P_\epsilon>0$，使得该算法 h 阶段每 N 步收敛于 U^* 的概率 $P_N\ge P_\epsilon>0$。

证明　若β算法符合遍历性前提，即∃ $h\in R$，使得 $\Omega\subseteq J\beta_h(U^*)$。则由定义知，对 $\forall x\in\Omega$，∃ $u\in U^*$，$\beta_h(x,u)$，即∃ $\{z_1,z_2,\cdots,z_m\}\subseteq\Omega$，使得

$$\alpha_{h_0}(x,z_1)>0,\quad h_0=f(x)+h$$

$$\alpha_{h_i}(z_i,z_{i+1})>0,\quad \alpha_{h_m}(z_m,u)>0$$

$$h_i=\min(h_{i-1},f(z_i)+h),\quad i=1,2,\cdots,m$$

此时，若 $z_i=z_j$，设 $i<j$，则有 $h_i\ge h_j$。因此

$$\alpha_{h_j}(z_j,z_{j+1})>0 \tag{10}$$

$$\alpha_{h_i}(z_j,z_{j+1})>0 \tag{11}$$

即

$$\alpha_{h_i}(z_i,z_{j+1})>0 \tag{12}$$

于是必∃ $\{v_1,\Lambda,v_{m+i-j}\}\subseteq\Omega$，使得

$$\alpha_{h_0}(x,v_1)>0,\quad h_0=f(x)+h$$

$$\alpha_{h_k}(v_k,v_{k+1})>0,\quad \alpha_{h_{m+i-j}}(v_{m+i-j},u)>0$$

$$h_k=\min(h_{k-1},f(v_k)+h)$$

$$k=1,2\cdots,m+i-j$$

其中

$$v_k=\begin{cases}z_k, & k\le i\\ z_{k-i+j}, & k>i\end{cases} \tag{13}$$

所以∃ $\{w_1,\Lambda,w_m\}\subseteq\Omega$，使得

$$\alpha_{h_0}(x,w_1)>0,\quad h_0=f(x)+h$$

$$\alpha_{h_k}(w_k,w_{k+1})>0,\quad \alpha_m(w_{m'},u)>0$$

$$h_k=\min(h_{k-1},f(w_k)+h),\quad k=1,2,\cdots,m'$$

其中，不存在 $i<j$ 使得 $w_i=w_j$。因此 $m'\le N$。

对于β算法的 h 阶段采样序列，经 $w_1,w_2,\cdots,w_m$ 抵达 U^* 的概率必大于等于

$$P_\epsilon=(c\alpha_\epsilon)^N>0 \tag{14}$$

其中

$$\alpha_\epsilon=\min_{x,y\in\Omega,\alpha_h(x,y)>0}\alpha_h(x,y) \tag{15}$$

由 x 的任意性，并由引理 1 知

$$P_N\ge P_\epsilon>0 \tag{16}$$

(证毕)

引理 3　若β算法符合遍历性前提，则∃ $P_\epsilon>0$，使得该算法每 N 步收敛于 U^* 的概率

$$P'_N\ge P_\epsilon>0 \tag{17}$$

由以上引理可给出算法的收敛性定理及其证明：

定理 1　若β算法符合遍历性前提，则该算法以概率 1 收敛于 U^*。

证明　若β算法符合遍历性前提，即∃ $P_\epsilon>0$，使得该算法每 N 步收敛于 U^* 的概率(17)成立。于是算法以概率

$$P=1-\prod_{i=1}^{\infty}(1-P'_N)=1-0=1 \tag{18}$$

收敛。(证毕)

6 应用结果

本文给出的离散β算法已成功地应用于求解生产调度排程等组合优化难题[3]。给定问题用丰田 GCA 得到的结果为 3 293。以此为基准，遗传算法计算得到的最好结果仅为 3 073，改进了 7%。模拟退火有时可得到 2 859.81 的最好结果，改进了 15%，但 100 次实验中 48% 不能得到现有最好结果。β算

法每次总能得到 2 859. 81 的最好结果, 改进了 15%。不同的是, 在 1 000 次实验中, β 算法 100% 收敛于现有最好结果, 求解质量极为稳定。

对于随机产生的 160 个问题, β 算法有 50%～95% 的几率得到优于 GCA 的结果, 无劣于 GCA 的情况出现。结果平均改善了 3. 65%～11. 76%, 大幅度超过了遗传算法和模拟退火算法, 求解质量也非常稳定。

参考文献:

[1] 汪泓, 韩文秀. 一种新的优化算法: β 算法[J] . 系统工程学报, 1999, 14(3) : 276-279.

[2] I H Osman, G Laporte. Metaheuristics: A bibliography [J] . Annuals of Operations Research. 1996, (63): 513-628.

[3] 汪泓. 复合随机全局优化算法的理论、方法与应用研究[D] . 天津: 天津大学, 1999.

(上接第 310 页)

参考文献:

[1] 李合生, 毛剑琴, 韩宇. 小波变换在大地回波噪声处理中的应用[J] . 北京航空航天大学学报, 2001, 27(2): 221-225.

[2] 李世玲, 李合生, 李治. 小波滤波器在弱信号检测中的应用及设计[J]. 西南交通大学学报, 2000, 35(1) : 86-89.

[3] S M sllat, W L Hang. Singularity detection and processing with wavelets[J] . IEEE Trans on Inf Theory, 1992, 38(2) : 617-643.

[4] 陈逢时. 子波变换理论及在信号处理中的应用[M] . 长沙: 国防科技大学出版社, 1998. 184-191.

[5] Daubechies I. The wavelet transform time-frequency localization and signal analysis[J] . IEEE Trans on Inf Theory, 1990, 36(3) : 961-1005.

[6] 杰里 L 伊伏斯, 爱德华 K 里迪. 现代雷达原理[M] . 北京: 电子工业出版社, 1991. 274-279.

(上接第 313 页)

5 结　论

本文研究了混合动态系统的稳定性问题, 导出了一系列等价性的结论。关于 Lyapunov 函数和本文结论中的一些函数的结构性问题将在后续文章中给出。这些问题包括: 是否存在同一函数对所有的子系统均成立, 如果存在这样的函数, 其结构如何; 对每一个子系统, 都有其各自的 Lyapunov 函数, 在这种情形下, 其结构又该如何。

参考文献:

[1] W Hahn. Stability of motion[M] . Berlin: Springer-Verlag, 1967.

[2] A N Michel, K Wang. Qualitative theory of dynamical systems[M] . New York: Marcel Dekker, 1995.

[3] K M Passino, A N Michel, P J Antsaklis. Lyapunov stability of a class of discrete event systems[J] . IEEE Trans on Autom Contr, 1994, 39(2): 269-279.

[4] S Pettersson, B Lennartson. LMI for stability and robustness of hybrid systems[A] . Proc American Control Conf[C] . New Mexico, 1997. 1714-1718.

[5] H Ye, A N Michel, L Hou. Stability theory for hybrid dynamical systems[J] . IEEE Trans on Autom Contr, 1998, 43(4) : 461-474.