

文章编号: 1001-0920(2001)03-329-04

基于线性矩阵不等式的不确定关联系统的分散鲁棒镇定

桂卫华, 谢永芳, 陈 宁, 吴 敏

(中南工业大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083)

摘 要: 应用线性矩阵不等式(LM I)方法研究不确定性关联大系统的分散鲁棒镇定问题。系统中不确定项具有数值界, 可不满足匹配条件。基于不确定项的表达形式, 给出了其可分散状态反馈镇定的充分条件, 即一组 LM Is 有解。在此基础上, 通过求解一凸优化问题, 提出了具有较小反馈增益的分散稳定化状态反馈控制律的设计方法。仿真示例说明了该方法的有效性和优越性。

关键词: 分散控制; 鲁棒控制; 不确定性; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP 273

文献标识码: A

Decentralized Robust Stabilization for Linear Uncertain Interconnected Systems Based on Linear Matrix Inequality

GU I W ei-hua, X IE Yong-fang, CH EN N ing, W U M in

(College of Information Science and Engineering, Central South University of Technology, Changsha 410083, China)

Abstract: The decentralized robust stabilization problem for large-scale uncertain systems is studied by means of linear matrix inequality (LM I) approach. The uncertainty is bounded and may not satisfy the so-called matching conditions. A sufficient condition for decentralized stabilization feedback control laws is derived. This condition is expressed as the solvability problem of linear matrix inequalities (LM Is). A convex optimization problem with LM I constraints is formulated to design a decentralized state feedback control with smaller gain parameters which enables the closed-loop system asymptotically stable.

Key words: decentralized control; robust control; uncertainty; linear matrix inequality

1 引 言

由于环境条件变化或辨识不精确等因素, 系统模型中常含有不确定性, 这样, 按照标称参数设计的控制器便可能失去预期的性能指标, 因而具有不确定性大系统的鲁棒控制的研究具有理论价值和实际

意义。在实际系统中, 不确定项往往具有数值界表达形式^[1], 可表示为 $|\Delta| < E$, 即矩阵 Δ 中每个元素的绝对值小于矩阵 E 中相应元素, 其中 E 为非负常数阵。这种表达形式不需要满足匹配条件, 更具一般性和实际意义。基于不确定项的数值界表达形式, 可以

收稿日期: 2000-04-24; 修回日期: 2000-08-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(69274005); 国家 863 应用基础研究基金项目(863-511-9845-003)

作者简介: 桂卫华(1950—), 男, 湖北武汉人, 教授, 博士生导师, 从事 LM I 方法、工业大系统等研究; 吴敏(1963—), 男, 广东代州人, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、非线性控制和智能控制等研究。

去掉不确定项分解后所附加的某些约束条件,从而有可能得到更易于实现的分散鲁棒控制器。

近年来,LM I方法以其高效的求解方法已引起控制界的关注,成为鲁棒分析与设计的重要方法^[2~4]。本文应用LM I方法研究一类具有数值界,可不满足匹配条件的时变不确定性关联系统的分散鲁棒镇定问题,得到其可分散状态反馈镇定的充分条件,提出具有较小反馈增益控制律的LM I设计方法。与文献[5]的Riccati方程方法相比,LM I方法克服了需预先调整多个参数、计算复杂、应用不便等问题。

2 问题描述及引理

考虑一类由 N 个子系统构成的具有数值界时变不确定性关联大系统,其子系统方程为

$$\dot{x}_i(t) = [A_{ii} + \Delta A_{ii}]x_i(t) + [B_i + \Delta B_i]u_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N [A_{ij} + \Delta A_{ij}]x_j(t) \quad (1)$$

其中, $x_i(t) \in R^{n_i}$ 和 $u_i(t) \in R^{m_i}$ 分别为状态和控制向量;标称系统 A_{ij} 和 B_i 具有适当的维数, (A_{ii}, B_i) 是可控的, $A_{ij}(j \neq i)$ 为互联矩阵; ΔA_{ij} 和 ΔB_i 为时变不确定项,它们有如下数值界

$$|\Delta A_{ij}| < D_{ij}, \quad |\Delta B_i| < E_i \quad (2)$$

$i, j = 1, 2, \dots, N$

其中 D_{ij} 和 E_i 为具有非负元素的实常数矩阵,并分别与 ΔA_{ij} 和 ΔB_i 同维。 $|\Delta| < \bar{\Delta}$ 的含义是: $|e_{ij}| \leq \bar{e}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, N$, e_{ij} 和 $\bar{e}_{ij}$ 分别为矩阵 Δ 和 $\bar{\Delta}$ 的第 ij 个对应元素。

假定各个子系统的状态都可直接测量得到。本文的目的是对每个子系统设计一个局部无记忆状态反馈控制律

$$u_i(t) = K_i x_i(t) \quad (3)$$

其中 $K_i \in R^{m_i \times n_i}$ 为局部反馈增益矩阵,使所得出的闭环复合大系统稳定。

下面给出文中用到的几个重要引理:

引理1 设 $A, B \in R^{n \times n}, A \geq B$, 则有 $C^T A C \geq C^T B C, \forall C \in R^{n \times k}$ 成立。

引理2 设 X 和 Y 是具有适当维数的向量或矩阵,则对任意正数 $\alpha > 0$,有

$$X^T Y + Y^T X \leq \alpha X^T X + \alpha^{-1} Y^T Y$$

成立。

引理3 设 Y 和 Q 是具有适当维数的向量或矩阵,其中 $Q > 0$, α 和 β 是给定的正数,则有

$$Y^T Y < \alpha I \text{ 当且仅当 } \begin{bmatrix} -\alpha I & Y^T \\ Y & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$Q^{-1} < \beta I \text{ 当且仅当 } \begin{bmatrix} Q & I \\ I & \beta I \end{bmatrix} > 0$$

引理4^[5] 若 $n \times m$ 阶矩阵 ΔA 满足 $|\Delta A| < D$, 则有

$$\Omega(D) \geq \Delta A \Delta A^T, \quad \Gamma(D) \geq \Delta A^T \Delta A$$

其中

$$\Omega(D) = \begin{cases} DD^T - I, & DD^T - I < n \text{diag}(DD^T) \\ n \text{diag}(DD^T), & \text{其它} \end{cases}$$

$$\Gamma(D) = \begin{cases} D^T D - I, & DD^T - I < m \text{diag}(D^T D) \\ m \text{diag}(D^T D), & \text{其它} \end{cases}$$

这里, $\text{diag}(R) = \text{diag}(r_{11}, r_{22}, \dots, r_{nn}), R = (r_{ij})$ 为 n 阶对称实阵。

注1 文中矩阵范数 M 定义为 M 的最大奇异值;矢量范数 a 为 a 的2范数。

3 分散鲁棒稳定化控制器设计

本节将导出具有数值界的时变不确定性关联系统(1)可分散状态反馈镇定的充分条件,并给出具有较小反馈增益的分散稳定化控制律的设计方法。

采用控制律(3),其闭环子系统为

$$\dot{x}_i = [A_{ii} + \Delta A_{ii}]x_i + [B_i + \Delta B_i]K_i x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N [A_{ij} + \Delta A_{ij}]x_j \quad (4)$$

考虑如下Lyapunov函数

$$V(x) = x^T P x = \sum_{i=1}^N x_i^T P_i x_i$$

$V(x)$ 沿系统(4)轨线的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & \sum_{i=1}^N (x_i^T P_i \dot{x}_i + \dot{x}_i^T P_i x_i) = \\ & \sum_{i=1}^N \{x_i^T (A_{ii}^T P_i + P_i A_{ii} + \Delta A_{ii}^T P_i + P_i \Delta A_{ii} + \\ & K_i^T B_i^T P_i + P_i B_i K_i + K_i^T \Delta B_i^T P_i + P_i \Delta B_i K_i) x_i + \\ & 2x_i^T P_i \sum_{j=1, j \neq i}^N (A_{ij} + \Delta A_{ij}) x_j\} \end{aligned} \quad (5)$$

由引理1,引理2和引理4可推出

$$\alpha P_i P_i + \alpha^{-1} \Gamma(D_{ii}) \geq P_i \Delta A_{ii} + \Delta A_{ii}^T P_i \quad (6)$$

$$\beta P_i P_i + \beta^{-1} K_i^T \Gamma(E_i) K_i \geq P_i \Delta B_i K_i + K_i^T \Delta B_i^T P_i \quad (7)$$

在引理2中令 $\alpha = 1$,可得

$$\sum_{i=1}^N 2x_i^T P_i \sum_{j=1, j \neq i}^N (A_{ij} + \Delta A_{ij}) x_j \leq$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^N \sum_{i=1, j \neq i}^N [X_i^T P_i (A_{ij} A_{ij}^T + \Delta A_{ij} \Delta A_{ij}^T) P_i X_i + 2X_j^T X_j] \leq \sum_{i=1}^N (X_i^T P_i F_{1i} P_i X_i + X_i^T P_i F_{2i} P_i X_i + F_{3i} X_i^T X_i) \quad (8)$$

其中

$$F_{1i} = \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} A_{ij}^T, \quad F_{2i} = \sum_{j=1, j \neq i}^N \Omega(D_{ij}), \quad F_{3i} = 2(N-1)I$$

将式(6) ~ (8) 代入式(5), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \leq & \sum_{i=1}^N X_i^T [A_{ii}^T P_i + P_i A_{ii} + \alpha P_i P_i + \\ & \alpha^{-1} \Gamma(D_{ii}) + K_i^T B_i^T P_i + P_i B_i K_i + \\ & \beta P_i P_i + \beta^{-1} K_i^T \Gamma(E_i) K_i + \\ & P_i F_{1i} P_i + P_i F_{2i} P_i + F_{3i}] X_i \end{aligned}$$

由 Lyapunov 稳定性定理知, 如果不等式

$$\begin{aligned} A_{ii}^T P_i + P_i A_{ii} + \alpha P_i P_i + \alpha^{-1} \Gamma(D_{ii}) + \\ K_i^T B_i^T P_i + P_i B_i K_i + \beta P_i P_i + \\ \beta^{-1} K_i^T \Gamma(E_i) K_i + P_i F_{1i} P_i + P_i F_{2i} P_i + F_{3i} < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

有正定对称解 P_i , 则不确定性关联大系统(1) 可以分散状态反馈镇定。

由引理 4 知, $\Gamma(D_{ii})$ 和 $\Gamma(E_i)$ 均为正定或半正定矩阵, 可分解为 $\Gamma(D_{ij}) = \Gamma(D_{ij})^{1/2} \Gamma(D_{ij})^{1/2}$, $\Gamma(E_i) = \Gamma(E_i)^{1/2} \Gamma(E_i)^{1/2}$ 。将式(9) 两边分别左乘以和右乘以 P_i^{-1} , 令 $X_i = P_i^{-1}$, $Y_i = K_i X_i$, 则得

$$\begin{aligned} A_{ii}^T X_i + X_i A_{ii} + \alpha I + \alpha^{-1} X_i \Gamma(D_{ii}) X_i + \\ Y_i^T B_i^T + B_i Y_i + \beta I + \beta^{-1} Y_i^T \Gamma(E_i) Y_i + \\ F_{1i} + F_{2i} + X_i F_{3i} X_i < 0 \end{aligned} \quad (10)$$

由 Schur 补^[2] 可知, 矩阵不等式(10) 等价于下述 LM I

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i & X_i \Gamma(D_{ii})^{1/2} & Y_i^T \Gamma(E_i)^{1/2} & X_i \\ \Gamma(D_{ii})^{1/2} X_i & -\alpha I & 0 & 0 \\ \Gamma(E_i)^{1/2} Y_i & 0 & -\beta I & 0 \\ X_i & 0 & 0 & F_{3i}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{A}_i = A_{ii}^T X_i + X_i A_{ii} + (\alpha + \beta) I + \\ Y_i^T B_i^T + B_i Y_i + F_{1i} + F_{2i} \end{aligned}$$

因此, 如果 LM I(11) 有解, 则闭环系统渐近稳定。据此可得下述定理:

定理 1 对满足式(2) 的时变不确定性关联大系统(1), 如果存在正定矩阵 X_i , 矩阵 Y_i , 正数 α 和 β , 使 LM I(11) 成立, 则大系统(1) 可分散状态反馈镇定, 且分散状态反馈增益阵为 $K_i = Y_i X_i^{-1}$ 。

定理 1 给出了大系统(1) 存在分散鲁棒稳定化控制器的一个充分条件, 但所得的反馈增益难以保证尽可能小。在实际工程应用中, 为了保证系统良好的动态性能和抑制测量噪声, 常采用具有较小反馈增益的控制律^[6]。

为求较小反馈增益矩阵, 考虑

$$Y_i^T Y_i < \theta I, \quad X_i^{-1} < \gamma I \quad (12)$$

其中 $\theta > 0$, $\gamma > 0$, 则

$$K_i^T K_i = \theta X_i^{-1} Y_i^T Y_i X_i^{-1} < \theta \gamma I$$

故可通过使得 θ 和 γ 极小化来获得具有较小增益的反馈矩阵。

由引理 3 知式(12) 等价于

$$\begin{bmatrix} -\theta I & Y_i^T \\ Y_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} X_i & I \\ I & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (13)$$

因此, 关联大系统(1) 具有较小反馈增益的分散鲁棒镇定控制律可由下述优化问题

$$\min \left(\sum_{i=1}^N \theta + \sum_{i=1}^N \gamma \right)$$

求解。约束条件为式(11) 和(13)。这是一个具有 LM Is 约束的凸优化问题, 可用 LM I 工具软件中的 M incx 命令^[7] 方便求解。

4 仿真示例

沿用前面的记号, 考虑一个可由式(1) 描述的由两个子系统组成的不确定性线性关联大系统, 其不确定项具有数值界。其中

$$\begin{aligned} A_{11} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 17 \end{bmatrix} \\ E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 04 & 0 & 01 \\ 0 & 03 & 0 & 04 \end{bmatrix} \\ A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -0 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 08 \\ 0 & 07 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 04 & 0 & 01 \\ 0 & 06 & 0 & 01 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

不难验证系统中的不确定项不满足匹配条件。用本文提出的方法, 在 LM ITOOL 环境下解相应的凸优化问题, 求得该系统的分散稳定化控制律为

$$\begin{aligned} u_1(t) = [-2 \ 010 \ 7 \ -1 \ 352 \ 3] x_1(t) \\ u_2(t) = \begin{bmatrix} -8 \ 785 \ 2 & 0 \ 202 \ 8 \\ -0 \ 544 \ 5 & -5 \ 920 \ 3 \end{bmatrix} x_2(t) \end{aligned}$$

待求解的是一组LMIs,且含有多个参数。但在LMITOOL环境下可一次性求出,求解非常方便,无需预先调整参数,克服了文献[5]的不足。

5 结 论

本文对不确定线性关联大系统给出了分散鲁棒控制器,其存在性依赖于相应的LMIs的解。系统中的不确定项具有数值界而不需满足匹配条件,消除了应用其它不确定项表达式所带来的约束。通过求解受LMI约束的凸优化问题,提出了具有较小反馈增益的LMI设计方法。该方法没有参数调整过程,求解应用十分便利。

参考文献:

- [1] Mehdi D, Hamid M A, Perrin F. Robustness and optimality of linear quadratic controller for uncertain systems[J]. Automatica, 1996, 32(7): 1081-1083

- [2] Boyd S, Ghaoui El, Feron E *et al*. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994
- [3] Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas[J]. Automatica, 1994, 30(8): 1307-1317
- [4] 谢永芳, 桂卫华, 吴敏. 基于线性矩阵不等式的分散 H_2/H_∞ 控制的次优设计[J]. 自动化学报, 2000, 26(2): 263-266
- [5] 刘新宇, 高立群, 张文力. 不确定线性组合系统的分散镇定与输出跟踪[J]. 信息与控制, 1998, 27(5): 342-350
- [6] Makarand S Phatak, S Sathya Keerthi. Gain optimization under control structure and stability region constraints[J]. Int J Contr, 1996, 63(5): 849-864
- [7] Gahinet P, Nemirovski A, Laub J *et al*. LMI control toolbox[M]. Natick: The Math Works Inc, 1995

下 期 要 目

- 非线性 H_∞ 控制理论最新发展动态 伏玉笋 等
- 非线性模型预测控制的现状与问题 陈虹 等
- 一种多级分布式制造系统的多智能体协同生产机制 单汨源 等
- 模糊控制器的结构化分析及系统化设计方法 李少远 田永青
- 一类不确定线性时滞系统的输出反馈鲁棒镇定 郑连伟 等
- 不确定线性组合系统的鲁棒 H_∞ 性能的判定 李忠海 等
- 非线性组合系统的鲁棒分散输出跟踪 陈兵 等
- 基于观测器的鲁棒模型预测控制算法 王伟 杨建军
- 一类不确定非线性系统的模糊动态输出反馈控制 佟绍成
- 不稳定对象及非最小相位对象的自抗扰控制仿真研究 刘翔 等
- 基于分散反馈控制的时滞混沌大系统 关新平 等
- 自适应模糊控制在感应电动机调速系统中的应用研究 孙笑辉 韩曾晋
- 联邦遗传算法在CSTR系统中的应用 林峰 杨启文
- 复杂系统的质量生存决策 叶明确 张世英