

文章编号: 1001-0920(2001)03-337-04

Delta 算子系统圆形区域极点配置的鲁棒性

张端金¹, 吴捷¹, 杨成梧²

(1. 华南理工大学 电力学院, 广东 广州 510640; 2. 南京理工大学 动力学院, 江苏 南京 210094)

摘要: 研究Delta算子描述的线性不确定离散系统圆形区域极点配置的鲁棒分析和鲁棒综合问题。基于Lyapunov稳定性理论, 提出Delta算子系统在区域极点约束下具有性能鲁棒性的判别条件及状态反馈设计方法, 并将连续与离散系统的有关结果统一到Delta算子框架中。

关键词: 离散系统; Delta算子; 区域极点配置; 鲁棒性

中图分类号: TP 273 **文献标识码:** A

Robustness of Pole Assignment in a Circular Region for Delta Operator Systems

ZHANG Duan-jin¹, WU Jie¹, YANG Cheng-wu²

(1. Electric Power College, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China; 2. School of Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: Robust analysis and synthesis of pole assignment in a circular region for the delta operator formulated linear uncertain systems are studied. Based on the Lyapunov's stability theory, sufficient condition of performance robustness is presented. The corresponding controller design via state feedback for the delta operator systems with regional pole constraints is given. The proposed method can unify some previous related results of continuous and discrete time systems into the delta framework.

Key words: discrete time system; delta operator; region pole assignment; robustness

1 引言

近年来,Delta算子理论在自动控制和信号处理中的应用研究受到广泛重视,取得了很大进展^[1]。Delta算子方法^[2]避免了高速采样时移位算子方法引起的数值不稳定问题,且当采样周期趋于零时,Delta离散模型趋于原来的连续模型。因而,基于Delta算子描述,能够统一处理连续和离散系统的鲁棒分析与综合问题。

控制系统设计的极点配置一般分为精确极点和区域极点两种配置形式。由于精确极点配置有时很难实现或因系统本身性能的要求,因此将闭环极点配置在指定的区域。这种区域极点配置的方法引起了控制界的研究兴趣,并已取得一些结果^[3]。

本文利用Lyapunov方法,研究了Delta算子系统圆形区域极点配置的性能鲁棒性,并给出了判定条件和控制器的综合算法。

收稿日期: 2000-02-14; 修回日期: 2000-06-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(69474021, 69674025); 中国博士后科学基金项目([2000]31)

作者简介: 张端金(1966—),男,湖北荆州人,副教授,博士后,从事鲁棒控制、高速信号处理等研究; 杨成梧(1936—),男,辽宁沈阳人,教授,博士生导师,从事广义系统、鲁棒控制等研究。

2 系统描述与引理

考虑Delta算子描述的标准系统和不确定系统

$$\rho x(t) = Ax(t) \quad (1)$$

$$\rho x(t) = (A + \Delta A)x(t) \quad (2)$$

其中, $A, \Delta A \in R^{n \times n}$, ΔA 为摄动矩阵; ρ 表示 d/dt (连续) 或 δ (离散), δ 即Delta算子, 定义为^[2]

$$\delta = \frac{q-1}{T} \quad (3)$$

式中, T 为采样周期, q 为前向移位算子。

对于图1所示的以 $(a, 0)$ 为圆心, r 为半径的圆形区域 $D(a, r)$ 的极点配置问题, 有如下引理:

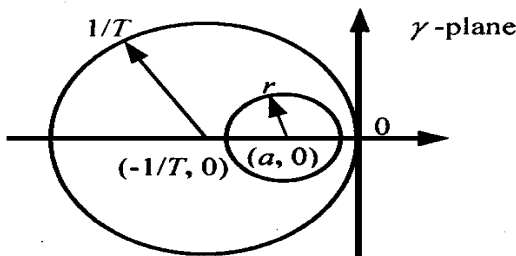


图1 圆形区域 $D(a, r)$ 的极点配置

引理1^[4] Delta算子系统(1)渐近稳定(即特征值 $\lambda(A) \subset D(-1/T, 1/T)$), 当且仅当Lyapunov方程

$$A^T P + PA + TA^T P A = -Q \quad (4)$$

有唯一正定解, 其中, $A, P, Q \in R^{n \times n}$, $Q = Q^T > 0$ 。

引理2 矩阵 $A \in R^{n \times n}$ 的所有特征根位于 $D(a, r)$ 内的充要条件是

$$\lambda \left\{ \frac{A - aI - (1/T)I}{rT} \right\} \subset D(-1/T, 1/T)$$

引理3^[4] 矩阵 $A \in R^{n \times n}$ 的所有特征根位于 $D(a, r)$ 内, 当且仅当存在正定矩阵 P , 满足

$$(I + TA_a)^T \frac{P}{T} (I + TA_a) - \frac{P}{T} + Q = 0 \quad (5)$$

其中 $A_a = \frac{A - aI - (1/T)I}{rT}$ (6)

注1 引理1和引理3可判定连续和离散系统的稳定性。在式(4)中令 $T = 0$, 可得连续情形的判定结果; 在式(5)中令 $T = 1, A = A + I$, 可得Z域稳定性的判别结论。

3 鲁棒分析

定理1 设Delta算子描述的标准系统(1)的极点位于 $D(a, r)$ 内, 则摄动系统(2)鲁棒 D 稳定(即 $\lambda(A + \Delta A) \subset D(a, r)$) 的充分条件为

$$\sigma_{\max}(\Delta A) <$$

$$r \left[\frac{\sigma_{\min}(Q) - (1/T)^2 \sigma_{\max}^2(P) \sigma_{\max}^2(I + TA_a)}{1 + (1/T) \sigma_{\max}(P)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

其中, P, Q 由式(5)确定, A_a 由式(6)定义, σ 为矩阵奇异值。

证明 根据式(5)有

$$\left(I + TA_a + \frac{\Delta A}{r} \right)^T \frac{P}{T} \left(I + TA_a + \frac{\Delta A}{r} \right) - \frac{P}{T} + Q = 0 \quad (8)$$

其中

$$Q_1 = Q - (I + TA_a)^T \frac{P}{T} \frac{\Delta A}{r} - \frac{\Delta A^T}{r} \frac{P}{T} (I + TA_a) - \frac{\Delta A^T}{r} \frac{P}{T} \frac{\Delta A}{r} \quad (9)$$

由引理3知, 若 $Q_1 > 0$, 则摄动系统(2)渐近稳定。

利用 $X^T Y + Y^T X = X^T X + Y^T Y$, 可得

$$\begin{aligned} & (I + TA_a)^T \frac{P}{T} \frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta A^T}{r} \frac{P}{T} (I + TA_a) + \\ & \frac{\Delta A^T}{r} \frac{P}{T} \frac{\Delta A}{r} - \frac{1}{r^2} \Delta A^T \left(I + \frac{P}{T} \right) \Delta A + \\ & (I + TA_a)^T \frac{P^T P}{T^2} (I + TA_a) \end{aligned} \quad (10)$$

由式(9)和(10)得

$$Q_1 = Q - \frac{1}{r^2} \Delta A^T \left(I + \frac{P}{T} \right) \Delta A - (I + TA_a)^T \frac{P^T P}{T^2} (I + TA_a) \quad (11)$$

如果

$$Q - \frac{1}{r^2} \Delta A^T \left(I + \frac{P}{T} \right) \Delta A - (I + TA_a)^T \frac{P^T P}{T^2} (I + TA_a) > 0 \quad (12)$$

则 $Q_1 > 0$, 从而摄动系统(2)稳定。

对于两个正定阵 X 和 Y , 存在如下关系

$$\sigma_{\max}(X) < \sigma_{\min}(Y) \Rightarrow X < Y \quad (13)$$

由三角不等式和Schwarz不等式, 有

$$\begin{aligned} & \sigma_{\max} \left[\frac{1}{r^2} \Delta A^T \left(I + \frac{P}{T} \right) \Delta A + \right. \\ & \left. (I + TA_a)^T \frac{P^T P}{T^2} (I + TA_a) \right] \\ & \sigma_{\max}^2(\Delta A) \frac{1}{r^2} \sigma_{\max} \left[I + \frac{P}{T} \right] + \\ & \frac{1}{T^2} \sigma_{\max}^2(I + TA_a) \sigma_{\max}^2(P) \end{aligned} \quad (14)$$

根据式(13)和(14), 得式(12)成立的充分条件为

$$\alpha_{\max}^2(\Delta A) \frac{1}{r^2} \alpha_{\max} \left(I + \frac{P}{T} \right) + \frac{1}{T^2} \alpha_{\max}^2 \left(I + TA_a \right) \alpha_{\max}^2(P) < \alpha_{\min}(Q) \quad (15)$$

式(15) 整理后即得证。

4 鲁棒综合

考虑Delta 算子描述的不确定系统

$$\rho_x(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t) \quad (16)$$

其中, $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}, x(t) \in R^n$ 为系统状态, $u(t) \in R^m$ 为控制输入, $\Delta A \in R^{n \times n}$ 为如下结构的摄动矩阵

$$\Delta A = DFE \quad (17)$$

这里 D 和 E 为已知矩阵, 不确定参数矩阵 F 满足

$$F^T F = I \quad (18)$$

下面设计 $u(t) = Kx(t)$, 使得Delta 算子系统(16) 的闭环特征根位于图1的 $D(a, r)$ 区域。引入记号

$$A_a = \frac{A - aI - (1/T)I}{rT}, \quad B_r = \frac{B}{rT}$$

$$D_r = \frac{D}{\sqrt{rT}}, \quad E_r = \frac{E}{\sqrt{rT}}$$

$$\Delta A_{ac} = D_r F E_r = \frac{\Delta A}{rT}$$

定义 1 如果存在对称正定阵 P , 使得对于所有容许的不确定性 ΔA 满足

$$(A_a + \Delta A_{ac})^T P + P(A_a + \Delta A_{ac}) + T(A_a + \Delta A_{ac})^T P(A_a + \Delta A_{ac}) < 0 \quad (19)$$

则称Delta 算子系统(16) 为区域极点可配置的。

定义 2 Delta 算子不确定系统(16) 称为状态反馈二次可 D 镇定, 当且仅当存在对称正定阵 P , 使得

$$(A_a + B_r K + \Delta A_{ac})^T P + P(A_a + B_r K + \Delta A_{ac}) + T(A_a + B_r K + \Delta A_{ac})^T P(A_a + B_r K + \Delta A_{ac}) < 0 \quad (20)$$

引理 4^[5] 设 D, A 和 E 为适当维数的矩阵, F 满足式(18), P 是满足下式的正定对称阵

$$\epsilon^{-1} I - D_r^T P D_r > 0, \quad \epsilon > 0$$

则有

$$A^T P D_r F E_r + E_r^T F^T D_r^T P A + E_r^T F^T D_r^T P D_r F E_r + A^T P D_r (\epsilon^{-1} I - D_r^T P D_r)^{-1} D_r^T P A + \epsilon^{-1} E_r^T E_r > 0 \quad (21)$$

定理 2 设 Q 和 R 均为对称正定阵, Delta 算子不确定系统(16) 可状态反馈二次 D 镇定的充分条

件是存在 $\epsilon > 0$, 使得Delta 算子 Riccati 方程

$$(I + TA_a)^T [P^{-1} + T(B_r R^{-1} B_r^T - \Theta D_r^T)]^{-1} \times (I + TA_a) - P + \epsilon^{-1} T E_r^T E_r + TQ = 0 \quad (22)$$

有对称正定解 P , 并满足

$$\epsilon^{-1} I - T D_r^T P D_r > 0 \quad (23)$$

此时状态反馈矩阵为

$$K = -R^{-1} B_r^T [P^{-1} + T(B_r R^{-1} B_r^T - \Theta D_r^T)]^{-1} (I + TA_a) \quad (24)$$

证明 令 $P_1 = P/T, B_1 = T B_r, A_c = I + TA_a + T B_r K, D_1 = T D_r$, 由引理 4 和矩阵求逆公式, 有 $V =$

$$(A_a + B_r K + \Delta A_{ac})^T P + P(A_a + B_r K + \Delta A_{ac}) + T(A_a + B_r K + \Delta A_{ac})^T P(A_a + B_r K + \Delta A_{ac}) + A_c^T (P_1^{-1} - \Theta D_1^T)^{-1} A_c + \epsilon^{-1} E_r^T E_r - P_1 \quad (25)$$

由定理 2 的条件(22) 可知

$$P_1 = (I + TA_a)^T (P_1^{-1} + B_1 R^{-1} B_1^T - \Theta D_1^T)^{-1} \times (I + TA_a) + \epsilon^{-1} E_r^T E_r + Q$$

将上式代入(25) 得

$$V = A_c^T (P_1^{-1} - \Theta D_1^T)^{-1} A_c - (I + TA_a)^T \times (P_1^{-1} + B_1 R^{-1} B_1^T - \Theta D_1^T)^{-1} (I + TA_a) - Q$$

记 $N = (P_1^{-1} + B_1 R^{-1} B_1^T - \Theta D_1^T)^{-1} (I + TA_a)$ 则有

$$(I + TA_a)^T (P_1^{-1} + B_1 R^{-1} B_1^T - \Theta D_1^T)^{-1} (I + TA_a) = N^T B_1 R^{-1} B_1^T N + N^T (P_1^{-1} - \Theta D_1^T) N$$

$$V = A_c^T (P_1^{-1} - \Theta D_1^T)^{-1} A_c - Q - N^T B_1 R^{-1} B_1^T N - N^T (P_1^{-1} - \Theta D_1^T) N$$

若取状态反馈增益

$$K = -R^{-1} B_r^T [P^{-1} + T(B_r R^{-1} B_r^T - \Theta D_r^T)]^{-1} (I + TA_a)$$

则有

$$A_c^T (P_1^{-1} - \Theta D_1^T)^{-1} A_c = N^T (P_1^{-1} - \Theta D_1^T) N$$

$$V = (Q + K^T R K) - Q < 0$$

由定义 2 知, 式(24) 确定的状态反馈可使不确定系统(16) 的闭环极点位于圆形区域 $D(a, r)$ 内。(证毕)

至此, 可得圆形区域极点配置的鲁棒综合算法如下:

- 1) 选择 T, Q, R 和 ϵ 的初值: Q 和 R 一般可取单位矩阵, $\epsilon = 10, 0 < T < 1_0$.
- 2) 确定 Riccati 方程(22) 是否存在满足式(23) 的正定对称解, 若有解则由式(24) 定义的状态反馈

控制律可鲁棒镇定Delta算子系统(16), 算法结束; 若无解则进行下一步。

3) 令 $\epsilon = \epsilon/2$, 转向2)。若 ϵ 小于给定的计算精度时方程(22) 仍无解, 则表明该算法失效, Delta算子系统(16) 是不可镇定的。

5 结 语

本文基于Lyapunov稳定性理论, 提出Delta算子不确定系统在区域极点约束下具有性能鲁棒性的充分条件和控制器综合的状态反馈实现方法。在极限情形下分别得到了连续和离散系统的有关结果, 并将所得结果统一到Delta算子框架中。

参考文献:

- [1] 张端金, 杨成梧. 反馈控制系统Delta算子理论的研究与发展[J]. 控制理论与应用, 1998, 15(2): 153-160
- [2] Middleton R H, Goodwin G C. Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1986, 31(11): 1015-1021.
- [3] Haddad W M, Bernstrin D S. Controller design with regional pole constraints[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1992, 37(1): 54-69
- [4] 张端金. Delta算子系统的建模与控制[D]. 南京: 南京理工大学, 1998
- [5] Garcia G, Bernussou J. Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1995, 40(1): 184-190

(上接第 328 页)

参考文献:

- [1] Chen Guanrong. Optimal control of chaotic systems[J]. Int J Bif and Chaos, 1994, 4(2): 461-463
- [2] Fouladi A, Valdivia J A. Period control of chaotic systems by optimization[J]. Phys Rev E, 1997, 55(2): 1315-1320
- [3] Paskota M, Mees A I, Teo K L. Stabilizing higher periodic orbits[J]. Int J Bif and Chaos, 1994, 4(2): 457-460
- [4] Paskota M, Mees A I, Teo K L. On control of chaos: Higher periodic orbits[J]. Dyn and Contr, 1995, 5(4): 365-387
- [5] Mettin R. Control of chaotic maps by optimized periodic inputs[J]. Int J Bif and Chaos, 1998, 8(8): 1707-1711.
- [6] Pan S, Yin Fuliang. Optimal control of chaos with synchronization[J]. Int J Bif and Chaos, 1997, 7(12): 2855-2860
- [7] 陈立群, 刘延柱. 控制混沌的研究现状与展望[J]. 上海交通大学学报, 1998, 32(1): 108-114
- [8] Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos[J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(11): 1196-1199
- [9] Aracchi F T, Boccaletti S, Ciolfini M. The control of chaos: Theoretical schemes and experimental realizations[J]. Int J Bif and Chaos, 1998, 8(8): 1643-1655
- [10] 陈翰馥, 郭雷. 现代控制理论的若干进展及展望[J]. 科学通报, 1998, 43(1): 1-7