文章编号: 1001-0920(2001)03-362-03

一类具有离散与分布时滞的控制系统的绝对稳定性

杨 斌[1], 陈绵云[2]
(1. 大连理工大学 自动化系, 辽宁 大连 116023; 2. 华中科技大学 控制科学与工程系, 湖北 武汉 430074)

摘 要: 用 Lyapunov 泛函法研究一类具有离散与分布时滞的控制系统的绝对稳定性问题, 给出了这类系统绝对稳定的时滞相关准则。应用实例表明, 与现有结果相比, 所得结果具有较小的保守性。

关键词: 时滞; 控制系统; 绝对稳定
中图分类号: TP 13 文献标识码: A

Absolute Stability of a Class of Control Systems with Discrete and Distributed Delays

YANG Bin[1], *CHEN Mian-yun*[2]
(1. Department of Automation, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China; 2. Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: Absolute stability for a class of control systems with discrete and distributed delays is investigated based on Lyapunov functional method. Delay dependent conditions are derived. The illustrative example shows that the obtained result is less conservative than existing criteria.

Key words: time delay; control system; absolute stability

1 引 言

时滞系统的稳定性问题具有明确的工程背景。事实上, 任何闭环控制系统都存在滞后效应, 因此从理论上研究时滞控制系统的稳定性, 便显得尤其重要。Popov 等[1~4] 研究了带有时滞的控制系统的绝对稳定性问题, 给出了系统绝对稳定的判别准则。但已有的判别准则均与时滞无关, 由于缺乏时滞信息, 这类结论在某些情况下比较保守; 另外, 所给的准则对系统系数矩阵的限制比较严格。文献[5] 用 Razumikhin 方法给出了滞后型控制系统绝对稳定的时滞相关条件, 由于限制条件较强, 从而得到的时滞界限较小。

本文用 Lyapunov 泛函法研究一类更广泛的具有离散与分布时滞的控制系统的绝对稳定性问题, 给出了系统绝对稳定的时滞相关准则。应用例子表明, 本文得出的结果具有较小的保守性。

2 定义与引理

考虑如下带有时滞的泛函微分方程

$$\mathring{x}(t) = f[t, x(t+\theta)], \quad t \geq 0, x \in R^n \quad (1)$$

其中, 函数 $f: I \times C[-h, 0] \rightarrow R^n$ 是连续的, $I = [0, \infty)$ 和 $C[-h, 0]$ 表示连续函数空间, $-h \leq \theta \leq 0$;

收稿日期: 2000-03-30; 修回日期: 2000-06-26
作者简介: 杨斌(1969—), 男, 辽宁长海人, 博士后, 从事非线性控制系统与一般系统的稳定性分析与控制等研究; 陈绵云(1937—), 男, 湖北竹山人, 教授, 博士生导师, 从事灰色预测控制理论及实验等研究。

函数 $\|\varphi\| = \max\limits_{-h\leq\theta\leq 0}\|\varphi(\theta)\|$, $\|\cdot\|$ 为向量的欧氏范数。

设函数 f 关于向量变元满足 Lipschitz 条件, 当 $t\in I$ 时关于 t 是一致的, 且 $t\in I$ 时, $f(t,0) = 0$。方程(1) 的初始条件为

$$x(\theta) = \varphi(\theta),\quad -h\leq\theta\leq 0 \qquad (2)$$

其中 φ 为 $[-h,0]$ 上的连续函数。在上述假设条件下, 方程(1) 和(2) 存在唯一解。

大多数关于时滞系统的研究均用到著名的克拉索夫斯基渐近稳定性定理, 但在研究带有时滞的系统稳定性问题时, 有关的泛函 V 并非正定的。为此补述一个不等式

$$\|z[t,x(t+\theta)]\|\leq F,\quad t\geq 0, x\in R^n \qquad (3)$$

$$x(\theta) = \varphi(\theta),\quad -h\leq\theta\leq 0 \qquad (4)$$

的平凡解 F-稳定的概念。这里, $z: I\times C[-h,0]\rightarrow R^n$, $z(t,0) = 0$, $F > 0$ 为常数, $\varphi\in C[-h,0]$。设 $x(t,\varphi)$ 和 $t\geq 0$ 是不等式(3) 满足初始条件(4) 的解。

定义 1　如果对于 $\forall\,\epsilon > 0$, $\exists\,\delta = \delta(t) > 0$, 使得当初始条件 $\varphi(\theta)$ 以及不等式右边的 F 满足

$$\|\varphi(\theta)\|\leq\delta,\quad F\leq\delta$$

时, 不等式的解 $x(t,\varphi)$ 对 $t\geq 0$ 有 $\|x(t,\varphi)\|\leq\epsilon$, 则称不等式(3) 的平凡解 $x(t)\equiv 0$ 是 F-稳定的。

下面的引理将用到函数 $w_v(s)$ $(v = 1,2)$, 其中 $w_v: R^+\rightarrow R^+$ 是严格增加的连续函数, 且 $w_v(0) = 0$。

引理 1[6]　设存在连续的泛函 $V: I\times C[-h,0]\rightarrow R$, 使得

$$w_1(\|z(t,\varphi)\|)\leq V(t,\varphi),\quad V(t,0) = 0 \qquad (5)$$

存在沿方程(1) 解的导数, 且使

$$\dot{V}[t,x(t,\varphi)]\leq -w_2(\|x(t)\|) \qquad (6)$$

并设不等式(3) 的平凡解是 F-稳定的, 则方程(1) 的平凡解渐近稳定。

3　主要结果

考虑如下具有离散与分布时滞的控制系统

$$\begin{cases}\mathring{x} = Ax + Bx(t-h) + \\ \qquad C\int_{-\tau}x(s)\,\mathrm{d}s + b\phi(y) \\ y = c^{\mathrm{T}}x\end{cases} \qquad (7)$$

其中, $x(t), b, c\in R^n$; $A, B, C\in R^{n\times n}$; $h\geq 0$, $\tau > 0$ 为常数, $\phi(y)\in K[0,k]$, $K[0,k] = \{\phi(y)\,|\,\phi(0) = 0, 0 < y\phi(y)\leq ky^2(y\neq 0)\}$。初始条件定义在区间 $[-h_0, 0]$ 上, $h_0 = \max\{h,\tau\}$。

假设矩阵 $\bar{A} = A + B$ 为 Hurwitz 矩阵, 这时系统(7) 改写成

$$\begin{cases}\mathring{z}(t) = \bar{A}x(t) + C\int_{-\tau}x(s)\,\mathrm{d}s + b\phi(y) \\ z(t) = x(t) + B\int_{-h}x(s)\,\mathrm{d}s\end{cases} \qquad (8)$$

设矩阵 P 为满足 Lyapunov 方程

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{A} = -Q \qquad (9)$$

的唯一正定解, 其中 Q 为任意给定的正定矩阵。

考虑系统(7) 解的泛函 $V = V_1 + V_2$, 取 $V_1 = z^{\mathrm{T}}(t)Pz(t)$, 经计算可得

$$\begin{aligned}&\dot{V}_1 = \mathring{z}^{\mathrm{T}}(t)Pz(t) + z^{\mathrm{T}}(t)P\mathring{z}(t)\leq \\ &\|x(t)\|^2\{-\lambda_{\min}(Q) + \\ &(1 + k^2\|c\|^2)\|Pb\| + \\ &h\|\bar{A}^{\mathrm{T}}PB\| + hk^2\|b^{\mathrm{T}}PB\|\|c\|^2 + \\ &\tau\|PC\|\} + (\|A^{\mathrm{T}}PB\| + \|b^{\mathrm{T}}PB\| + \\ &\tau\|C^{\mathrm{T}}PB\|)\int_{-h}\|x(s)\|^2\mathrm{d}s + \\ &(\|PC\| + h\|C^{\mathrm{T}}PB\|)\int_{-\tau}\|x(s)\|^2\mathrm{d}s\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}&V_2 = \\ &(\|\bar{A}^{\mathrm{T}}PB\| + \|b^{\mathrm{T}}PB\| + \\ &\tau\|C^{\mathrm{T}}PB\|)\int_{-h}\mathrm{d}s\int\|x(\xi)\|^2\mathrm{d}\xi + \\ &(\|PC\| + h\|C^{\mathrm{T}}PB\|)\int_{-\tau}\mathrm{d}s\int\|x(\xi)\|^2\mathrm{d}\xi\end{aligned} \qquad (10)$$

则有

$$\begin{aligned}&\dot{V}\leq \\ &\|x(t)\|^2\{-\lambda_{\min}(Q) + \\ &(1 + k^2\|c\|^2)\|Pb\| + \\ &2h\|\bar{A}^{\mathrm{T}}PB\| + h(k^2\|c\|^2 + 1)\|b^{\mathrm{T}}PB\| + \\ &h\tau\|C^{\mathrm{T}}PB\| + \tau(2\|PC\| + h\|C^{\mathrm{T}}PB\|)\}\end{aligned}$$

将系统泛函用于引理 1, 再要求

$$\begin{aligned}&\lambda_{\min}(Q) > \\ &(1 + k^2\|c\|^2)\|Pb\| + 2h\|\bar{A}^{\mathrm{T}}PB\| + \\ &h(1 + k^2\|c\|^2)\|b^{\mathrm{T}}PB\| + \\ &h\tau\|C^{\mathrm{T}}PB\| + \tau(2\|PC\| + h\|C^{\mathrm{T}}PB\|)\end{aligned} \qquad (11)$$

显然满足条件(5) 和(6)。

下面建立不等式 $\|z(t)\|\leq F$ 或如下不等式的平凡解 F-稳定的条件。

$$\left\|x(t) + B\int_{-h}x(s)\,\mathrm{d}s\right\|\leq F,\quad t\geq 0 \qquad (12)$$

由式(12)得

$$\|x(t)\| \le F + \|B\|\int_{-h}^{0}\|x(t+\theta)\|\,d\theta \qquad (13)$$

取 $\rho(t) = \max\limits_{0\le s\le t}\|x(s)\|$, 并应用不等式 $\|x(t+\theta)\| \le \rho(t) + \|\varphi(\theta)\|$, 由式(13)得到估计式

$$\rho(t) \le F + h\|B\|\,\|\varphi(\theta)\| + h\|B\|\rho(t), \quad t \ge 0$$

由此可知, 不等式

$$1 - h\|B\| > 0 \qquad (14)$$

成立, 则有

$$\|x(t)\| \le \frac{F}{1-h\|B\|} + \frac{h\|B\|}{1-h\|B\|}\|\varphi(\theta)\|, \quad t \ge 0$$

从而得出不等式(12)的平凡解是 F-稳定的结论。进而可得如下定理:

定理1 如果矩阵 $\bar{A} = A + B$ 为Hurwitz矩阵, 且满足条件(11)和(14), 则系统(7)绝对稳定。

下面给出系统绝对稳定的另一结果。假设矩阵 $\bar{A} = A + B + \tau C$ 为Hurwitz矩阵, 则系统(7)可改写成

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \bar{A}x(t) + b\phi(y) \\ z(t) = x(t) + B\int_{t-h}^{t}x(s)\,ds + \\ \qquad C\int_{t-\tau}^{t}(s-t+\tau)x(s)\,ds \end{cases} \qquad (15)$$

设矩阵 P 为满足 Lyapunov 方程

$$\bar{A}^{T}P + P\bar{A} = -Q \qquad (16)$$

的唯一正定解, 其中 Q 为任意给定的正定矩阵。取系统(7)解的泛函为

$$\begin{aligned} V = {} & z^{T}(t)Pz(t) + (\|\bar{A}^{T}PB\| + \|b^{T}PB\|) \times \\ & \int_{t-h}^{t}ds\int_{s}^{t}\|x(\xi)\|^{2}d\xi + \\ & (\|\bar{A}^{T}PC\| + \|b^{T}PC\|) \times \\ & \int_{0}^{\tau}ds\int_{t-s}^{t}(s_1 - t + s)^{2}\|x(s_1)\|^{2}ds_1 \end{aligned} \qquad (17)$$

类似于定理1, 可得如下定理:

定理2 如果矩阵 $\bar{A} = A + B + \tau C$ 为Hurwitz矩阵, 且满足条件

$$\begin{aligned} & \lambda_{\min}(Q) > \\ & (1 + k^{2}\|c\|^{2})\|Pb\| + 2h\|\bar{A}^{T}PB\| + \\ & h(1 + k^{2}\|c\|^{2})\|b^{T}PB\| + \\ & \tau\|\bar{A}^{T}PC\| + \tau k^{2}\|b^{T}PC\|\,\|c\|^{2} + \\ & \tau^{3}(\|\bar{A}^{T}PC\| + \|b^{T}PC\|)/3 \\ & 1 - (h\|B\| + \tau^{2}\|C\|/2) > 0 \end{aligned}$$

则系统(7)绝对稳定。

4 应用实例

考虑系统[5]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2 & -0.5 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix}\phi(y(t))$$

$$y(t) = 0.6x_1(t) + 0.8x_2(t)$$

$$\phi(\cdot) \in K[0, 0.5]$$

显然, 这是系统(7)的一种特殊情况。

取 $P = I$, 则 $\lambda_{\min}(Q) = 3.4$。由定理1可得该系统绝对稳定的条件为 $h < 0.936\,0$, 而采用文献[5]的方法得到的时滞界限为 0.305 3。取 $Q = 2I$, 则

$$P = \begin{bmatrix} 0.479\,3 & -0.108\,9 \\ -0.108\,9 & 0.479\,3 \end{bmatrix}$$

可得 $h < 1.563\,3$, 而采用文献[5]的方法得到的时滞界限为 0.091 8。由此可见, 本文得到的结果大大提高了时滞界限。

5 结 论

本文用 Lyapunov 泛函法研究一类具有离散与分布时滞的控制系统的绝对稳定性问题, 给出了这类系统绝对稳定的若干准则。应用例子表明, 与现有结果相比, 本文所得结果不仅扩大了系统绝对稳定的时滞界限, 而且具有较小的保守性。

参考文献:

[1] Popov V M, Halanay A. About stability of nonlinear controlled systems with delay[J]. Autom Remote Contr, 1962, 23(7): 849-851.

[2] Somolines A. Stability of Lurie type functional equations[J]. J Diff Eqs, 1977, 26(1): 191-199.

[3] Hale J. Theory of functional equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1977.

[4] 王联, 张毅, 章毅. 一类滞后型控制系统的绝对稳定性[J]. 科学通报, 1993, 8(16): 1445-1448.

[5] 年晓红. Lurie 控制系统绝对稳定的时滞相关条件[J]. 自动化学报, 1999, 25(4): 564-566.

[6] Ponhob A M. Method for researching the stability problem of differential equation and discrete equation with time delay[J]. Automatika Telemekh, 1996, 57(12): 38-47.